Révisions

V.Vong

1 Analyse

Exercice 1. Étude des fonctions (domaine de définition, dérivée, tableau de variations, limites aux infinis, tracé de courbes) :

1. $f(x) = x^2 \arctan(\frac{1}{1+x})$ 2. $f(x) = \frac{\ln(|x-2|)}{\ln(|x|)}$ 3. $f(x) = \frac{x\ln(x)}{x^2-1}$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

1. $(a > 1, x > a)$. $\int_a^x \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt$ (Poser $u = \sqrt{e^t - 1}$) 2. $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}dx$ (poser $t = \frac{1}{x}$) 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(x)dx$ (poser $u = \sin(x)$)
4. $(a \neq 0)$ $\int_0^t \frac{1}{a^2+x^2}dx$ (poser $u = \frac{x}{a}$) 5. $\int_1^t \frac{\ln(x)}{x}dx$ (poser $u = \ln(x)$) 6. $\int_{\frac{1}{2}}^2 (1 + \frac{1}{x^2}) \arctan(x)dx$ $(u = \frac{1}{x})$.

Exercice 3. On cherche à déterminer les intégrales suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x)dx, v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos(x)dx.$$

1. Déterminer u_0, v_0, u_1, v_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\forall n \geq 1, u_n = nv_{n-1}, v_n = (\frac{\pi}{2})^n - nu_{n-1}.$$
3. En déduire que
$$\forall n \geq 2, u_n = n(\frac{\pi}{2})^{n-1} - n(n-1)u_{n-2}, v_n = (\frac{\pi}{2})^n - nu_{n-1}.$$
4. Déterminer u_2, u_3, v_2, v_3 à l'aide de la récurrence.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = \frac{u_n}{n!}$. Montrer que
$$\forall n \geq 2, \alpha_n = \frac{(\frac{\pi}{2})^{n-1}}{(n-1)!} - \alpha_{n-2}.$$
6. En déduire α_n en fonction de n et de sa parité. (Le résultat s'écrit sous la forme d'une somme). En déduire u_n en fonction de n.
7. Raisonnez d'une manière similaire pour trouver v_n en fonction de n.

2 Algèbre

Exercice 4. Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre l'équation $(A - \lambda I_3)X = 0$, avec $\lambda \in \{1, -2, 2\}$.
   On pose :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Calculer B^{-1}.
3. Calculer BAB^{-1}.
4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. On pose :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A.
2. Calculer A^2, A^3 et montrer que
$$A^3 - 3A + 2I = 0.$$
3. En déduire que la matrice A est inversible, calculer A^{-1}.
4. Montrer la propriété suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in \mathbb{R}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1 + a_n \end{pmatrix}$$
   En particulier, on déterminera une relation de récurrence sur les a_n.
5. Calculer a_n en fonction de n.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n en fonction de n.