Révisions

V.Vong

1 Analyse

Exercice 1. Étude des fonctions (domaine de définition, dérivée, tableau de variations, limites aux infinis, tracé de courbes) :

1. $f(x) = x^2 \arctan(\frac{1}{1+x})$ 2. $f(x) = \frac{\ln(|x-2|)}{\ln(|x|)}$ 3. $f(x) = \frac{x\ln(x)}{x^2-1}$

Correction

Remarque 1. La rédaction de certains points a été abrégée : en particulier, certains calculs n'apparaissent pas. N'hésitez pas à envoyer un mail si certains points vous semblent obscurs.

1. On pose :
$$\begin{array}{cccc} f_1 & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2, \end{array} \quad \begin{array}{cccc} f_2 & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{1+x}, \end{array}$$
La fonction $x \mapsto x+1$ étant affine et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Par quotient, on en déduit que f_2 est C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. f_1 étant un polynôme, on en déduit que f_1 est C^1 sur $\mathbb{R}$. La fonction arctan est par définition C^1 sur $\mathbb{R}$. On a $f = f_1 \cdot \arctan \circ f_2$. Par composée et produit de fonction, on en déduit que f est C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On a donc :$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
Calcul de f' :
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \begin{array}{rcl} f'(x) & = & 2x\arctan(\frac{1}{1+x}) - \frac{x^2}{(1+x)^2+1} \\ & = & x\left(2\arctan(\frac{1}{1+x}) - \frac{x}{(1+x)^2+1}\right) \end{array}$$
On pose :$\forall x \neq -1, g(x) = 2\arctan(\frac{1}{1+x}) - \frac{x}{(1+x)^2+1}$. g étant somme quotient et produit de fonction C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on en déduit que g est C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Calcul de g' (après simplification) :
$$\forall x \neq -1, g'(x) = \frac{-(x^2+4x+6)}{((1+x)^2+1)^2}$$
On a donc le tableau de variations suivant pour g (avec les calculs de limite) :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\pi + \frac{1}{5}$ $\Vert$ $\pi + \frac{1}{5}$	$\searrow$	0

On en déduit le tableau de variation suivant pour f :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\pi}{2}$ $\Vert$ $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

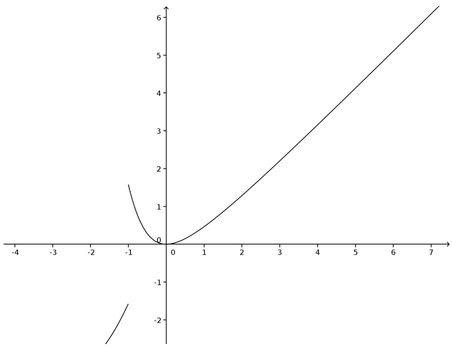

FIGURE 1 – graphe de $x \mapsto x^2 \arctan(\frac{1}{1+x})$

Tracé de la courbe f.

2. Étude de $f(x) = \frac{\ln(|x-2|)}{\ln(|x|)}$
Domaine de définition et de dérivabilité : f est un quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1,2\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet ensemble. Donc :

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1,2\}.$$

Calcul de f' :

$$\forall x \in D_f, \quad \begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x-2}\ln(|x|) - \frac{\ln(|x-2|)}{x}}{\ln(|x|)^2} \\ &= \frac{x\ln(|x|) - (x-2)\ln(|x-2|)}{x(x-2)\ln(|x|)^2} \end{aligned}$$

Étudions la fonction $g : x \mapsto x\ln(|x|) - (x-2)\ln(|x-2|)$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,2\}, g'(x) = \ln\left(\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)$$

On en déduit le tableau de variations suivant pour g :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln(2)$ || $2\ln(2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2\ln(2)$ || $2\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, on en déduit que $\forall x \neq 1, g(x) > 0$. On en déduit le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	||	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0 || 0	$\searrow$	-1 || -1	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

Graphe représentative de f :

3. $D_f = D_{f'} =]0,1[\cup]1,+\infty[$. Calcul de f' :

$$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{(x^2+1)(1-\ln(x)) - 2}{(x^2-1)^2}.$$

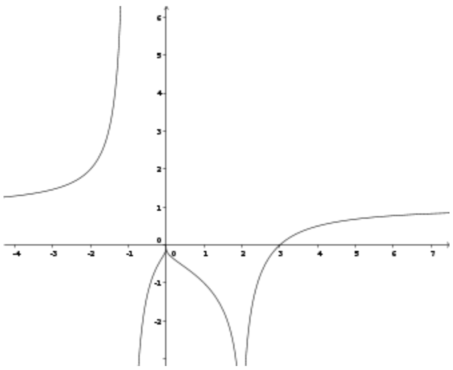

FIGURE 2 – graphe de $x \mapsto \ln(\frac{|x-2|}{|x|})$

Déterminons le signe de f' :

$$(x^2+1)(1-\ln(x)) - 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \geq \ln(x) + \tfrac{2}{x^2+1} - 1$$

Étudions la fonction $g : x \mapsto \ln(x) + \frac{2}{x^2+1} - 1$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{x(x^2+1)^2} \geq 0.$$

Donc nous avons les variations suivantes pour g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	0
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit le tableau de variations pour f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Courbe représentative de f :

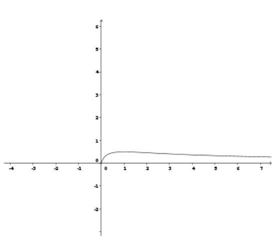

FIGURE 3 – graphe de $x \mapsto \frac{x\ln(x)}{x^2-1}$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

1. $(a > 1, x > a)$. $\int_a^x \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt$ (Poser $u = \sqrt{e^t - 1}$)
2. $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}dx$ (poser $t = \frac{1}{x}$)
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(x)dx$ (poser $u = \sin(x)$)
4. $(a \neq 0)$ $\int_0^t \frac{1}{a^2+x^2}dx$ (poser $u = \frac{x}{a}$)
5. $\int_1^t \frac{\ln(x)}{x}dx$ (poser $u = \ln(x)$)
6. $\int_{\frac{1}{2}}^2 (1 + \frac{1}{x^2}) \arctan(x)dx$ $(u = \frac{1}{x})$.

Correction

Remarque 2. En pratique, il existe "deux types" de changement de variables. Dans le premier cas, on a une expression de la forme

$$I = \int_a^b f(u)du.$$

Pour effectuer un changement de variable de la forme $u = \phi(t)$, on vérifiera les hypothèses suivantes :

1. ϕ est C^1 sur le segment correspondant.
2. ϕ' ne s'annule pas sur ce segment.

Dans le deuxième cas, on a une expression de la forme

$$I = \int_a^b (f \circ \phi)(t)\phi'(t)dt.$$

Pour effectuer le changement de variable $u = \phi(t)$, on vérifiera l'hypothèse suivante :

1. ϕ est C^1 sur $[a, b]$.

Concernant le calcul, il y a 3 points importants :

1. déterminer les nouvelles bornes,
2. exprimer x en fonction de t,
3. exprimer dx en fonction de dt.

Par exemple, si on a $u = 2x+1 = \phi(x)$. Si les bornes pour x sont 1 et 2, alors les bornes pour u sont $\phi(1)$ et $\phi(2)$ autrement dit 3 et 5. Et on a $du = \phi'(x)dx$, autrement dit $du = 2dx$.

Remarque 3. Par souci de concision, certaines vérifications pour le changement de variable n'ont pas été faites.

1. On pose $u = e^t - 1$. La fonction $\phi : t \mapsto \sqrt{e^t - 1}$ est C^1 sur $[a, x]$. De plus, ϕ' étant la fonction exponentielle, elle ne s'annule pas sur $[a, x]$. On peut donc appliquer la formule du changement de variable. On a

$$\begin{array}{rcll} u & = & \sqrt{e^t - 1} & (u = \phi(t)) \\ du & = & \frac{e^t}{2\sqrt{e^t-1}}dt & (du = \phi'(t)dt) \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} u^2 + 1 & = & e^t \\ \frac{2du}{u^2+1} & = & \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} \end{array}$$

D'où

$$\int_{\sqrt{e^a-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{2du}{1+u^2} = \int_a^x \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt$$

Donc

$$\int_a^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}}dt = 2\arctan(\sqrt{e^x - 1}) - 2\arctan(\sqrt{e^a - 1}).$$

2. On pose $t = \frac{1}{x}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est C^1 sur $[\frac{1}{3}, 3]$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $[\frac{1}{3}, 3]$. On a

$$\begin{array}{rcl} t & = & \frac{1}{x} \\ dt & = & \frac{-1}{x^2}dx \end{array}$$

Donc

$$\int_1^3 (t^2 - 1)^{\frac{1}{3}} tdt = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x - x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}dx.$$

Or

$$\int_1^3 (t^2 - 1)^{\frac{1}{3}} tdt = \frac{3}{8}\left(8^{\frac{4}{3}}\right) = 6.$$

Donc

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x - x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}dx.$$

3. On pose $u = \sin(x)$ on constate alors que $\cos(x)^6 = f(u)$ avec $f(u) = (1-u^2)^3$ et $du = \cos(x)dx$. (Quel est le type de changement de variables ?) Donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^7 dx = \int_0^1 (1-u^2)^3 du.$$

Or

$$\int_0^1 (1-u^2)^3 du = \int_0^1 (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6) du = \frac{16}{35}.$$

Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^7 dx = \frac{16}{35}.$$

4. On pose $u = \frac{x}{a}$ (Que doit-on vérifier pour pouvoir effectuer le changement de variable ?). Donc $du = \frac{1}{a}dx$. On a

$$\int_0^t \frac{1}{a^2+x^2} dx = \int_0^{\frac{t}{a}} \frac{1}{a^2+a^2u^2} a du = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{t}{a}} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Donc

$$\int_0^t \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{t}{a}).$$

5. On pose $u = \ln(x)$. On a donc $du = \frac{dx}{x}$. D'où

$$\int_1^t \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_0^{\ln(t)} u du = \frac{\ln(t)^2}{2}.$$

6. On rappelle que pour tout $x > 0, \arctan(\frac{1}{x}) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. En effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$, on constate que l'on a

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^2 (1 + \frac{1}{x^2}) \arctan(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 (1+\frac{1}{x^2}) \arctan(\frac{1}{x}) dx.$$

Donc

$$2I = \int_{\frac{1}{2}}^2 (1+\frac{1}{x^2})\frac{\pi}{2} dx,$$

donc

$$I = \frac{3\pi}{4}.$$

Exercice 3. On cherche à déterminer les intégrales suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x) dx, v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos(x) dx.$$

1. Déterminer u_0, v_0, u_1, v_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \geq 1, u_n = n v_{n-1}, v_n = (\frac{\pi}{2})^n - n u_{n-1}.$$

3. En déduire que

$$\forall n \geq 2, u_n = n(\frac{\pi}{2})^{n-1} - n(n-1)u_{n-2}, v_n = (\frac{\pi}{2})^n - n u_{n-1}.$$

4. Déterminer u_2, u_3, v_2, v_3 à l'aide de la récurrence.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = \frac{u_n}{n!}$. Montrer que

$$\forall n \geq 2, \alpha_n = \frac{(\frac{\pi}{2})^{n-1}}{(n-1)!} - \alpha_{n-2}.$$

6. En déduire α_n en fonction de n et de sa parité. (Le résultat s'écrit sous la forme d'une somme). En déduire u_n en fonction de n.
7. Raisonnez d'une manière similaire pour trouver v_n en fonction de n.

Correction

1. On a
$$u_0 = 1, v_0 = 1, u_1 = 1, v_1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$
2. Soit $n \geq 1$. On pose $f(x) = x^n, g(x) = -\cos(x), f'(x) = nx^{n-1}, g'(x) = \sin(x)$ (Que doit-on vérifier pour pouvoir effectuer une intégration par parties ?). On a donc :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x)dx = [-x^n \cos(x)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} nx^{n-1}\cos(x)dx.$$
D'où
$$u_n = nv_{n-1}.$$
En posant $f(x) = x^n, g(x) = \sin(x), f'(x) = nx^{n-1}, g'(x) = \cos(x)$, on obtient
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin(x)dx = [x^n \sin(x)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} nx^{n-1}\sin(x)dx = (\frac{\pi}{2})^n - nv_{n-1}.$$
3. Il suffit d'utiliser les récurrences que l'on a montré. Ainsi :
$$\forall n \geq 2, u_n = n(\frac{\pi}{2})^{n-1} - n(n-1)u_{n-2}, v_n = (\frac{\pi}{2})^n - nu_{n-1}.$$
4. $u_2 = 2v_1 = 2(\frac{\pi}{2} - 1) = \pi - 2$. $v_2 = (\frac{\pi}{2})^2 - 2$,
$u_3 = 3v_2 = 3(\frac{\pi}{2})^2 - 6$, $v_3 = (\frac{\pi}{2})^3 - 3u_2 = (\frac{\pi}{2})^3 - 3\pi + 6$.
5. En considérant les récurrences vérifiées par u_n et v_n et en divisant par $n!$, on obtient bien :
$$\forall n \geq 2, \alpha_n = \frac{\frac{\pi}{2}^{n-1}}{(n-1)!} - \alpha_{n-2}.$$
6. Pour $n = 2p$, on obtient :
$$\alpha_n = \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{(\frac{\pi}{2})^{n-1-2k}}{(n-1-2k)!}\right) + (-1)^p$$
(montrer par récurrence et à l'aide d'un changement de variable par exemple). De même, pour $n = 2p+1$, on a
$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(\frac{\pi}{2})^{n-1-2k}}{(n-1-2k)!}$$
Pour u_n, on en déduit
$$n = 2p, u_n = n!\alpha_n = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{n!}{(n-1-2k)!}(\frac{\pi}{2})^{n-1-2k} + (-1)^p n!.$$
et
$$n = 2p+1, u_n = n!\alpha_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{n!}{(n-1-2k)!}(\frac{\pi}{2})^{n-1-2k}.$$
7. En utilisant $v_n = \frac{u_{n+1}}{n+1}$, on en déduit des expressions similaires pour v_n.

2 Algèbre

Exercice 4. Calculer le rang des matrices suivantes :
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Correction

1. On échelonne en colonnes : $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ puis $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & -2 \\ 7 & -2 & -3 \\ 14 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

en effectuant $C_1 \leftrightarrow C_1 + \frac{7}{2}C_2$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

On a alors échelonné la matrice en colonnes de droite à gauche. On en déduit que la matrice initiale est de rang 2.

2. On échelonne en lignes. $L_1 \leftarrow L_1 - L2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$. On obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \\ 1 & -2 & -3 & -5 \end{pmatrix},$$

En effectuant $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{5}L_2$, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \\ 1 & -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la matrice est de rang 2.

3. En effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 + L1$, $L_5 \leftarrow L_5 + L_1$ on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$, $L_5 \leftarrow L_5 + 2L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

En échangeant les ligne 3 et 4 puis en effectuant les opérations élémentaires $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3$ et $L_5 \leftarrow L_5 - 6L_3$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Comme $L_5 = 2L4$, on en déduit que la matrice initiale est de rang 4.

Exercice 5. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre l'équation $(A - \lambda I_3)X = 0$, avec $\lambda \in \{1, -2, 2\}$.
   On pose :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer B^{-1}.
3. Calculer BAB^{-1}.
4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction

1. $$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ -3 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} X = 0 \quad \Leftrightarrow L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ -3 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} X = 0$$

$$\Leftrightarrow L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} X = 0$$

Pour $\lambda = 1$, on obtient :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour $\lambda = 2$, on obtient :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour $\lambda = -2$, on obtient :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Calcul de B^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 : \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 : \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3, L_2 \leftarrow -L_2 : \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

3. Calcul de $D = BAB^{-1}$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. On a :

$$A = B^{-1}DB.$$

Donc :

$$A^n = B^{-1}D^nB.$$

Donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2-(-2)^n & (-2)^n - 2^n & 2-(-2)^n - 2^n \\ 1-(-2)^n & (-2)^n & 1-(-2)^n \\ -1+(-2)^n & 2^n - (-2)^n & -1+(-2)^n + 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 6. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A.
2. Calculer A^2, A^3 et montrer que
$$A^3 - 3A + 2I = 0.$$
3. En déduire que la matrice A est inversible, calculer A^{-1}.
4. Montrer la propriété suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in \mathbb{R}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}$$
En particulier, on déterminera une relation de récurrence sur les a_n.
5. Calculer a_n en fonction de n.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n en fonction de n.

Correction

1. En effectuant les opérations $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$ puis $C_3 \leftarrow C_3 - 6C_2$, on obtient une matrice échelonnée en colonnes de rang 3. Donc A est de rang 3.
2. On a :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 18 & -17 & 18 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$
En calculant on constate alors que
$$A^3 - 3A + 2I = 0.$$
3. On a : $2I = 3A - A^3$. D'où $I = A(\frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A^2) = (\frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A^2)A$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A^2)$. D'où
$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$P(n) : \exists a_n \in \mathbb{R}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}.$$
Montrons par récurrence que pour tout$n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
   - Initialisation : pour $n = 0, a_0 = 0$.
   - Hérédité : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n+1)$ vraie. $P(n)$ étant vraie, on sait qu'il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}.$$
   Donc :
   $$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6-4a_n & -5+4a_n & 6-4a_n \\ 3-2a_n & -3+2a_n & 4-2a_n \end{pmatrix}.$$
   Nécessairement, on doit avoir $a_{n+1} = 3 - 2a_n$. On a bien :
   $$2a_{n+1} = 6 - 4a_n, 1 - 2a_{n+1} = -5 + 4a_n, 1 + a_{n+1} = 4 - 2a_n, -3 + 2a_n = -a_{n+1}.$$
   Donc a_{n+1} existe bien. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. De plus, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :
   $$a_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 3 - 2a_n.$$
5. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique de premier terme 0. En résolvant, on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = -(-2)^n + 1 = (-1)^{n+1}2^n + 1.$$
6. On en déduit, pour la matrice A^n :
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (-2)^{n+1} + 2 & -1 - (-2)^{n+1} & (-2)^{n+1} + 2 \\ (-1)^{n+1}2^n + 1 & (-1)^n 2^n - 1 & (-1)^{n+1}2^n + 2 \end{pmatrix}.$$