Entraînement 1

BCPST 1 2019-2020

Réels, équations, inéquations

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{1-3x} = |x+2|$; 2. $|x+1| + |2x-1| = 3$; 3. $x = 1 + \sqrt{x^2-2}$;
4. $x|x| = 4x - 1$; 5. $x + 2|x| = \frac{1}{x}$; 6. $x - 3 = \sqrt{x+5}$.

Exercice 2. On considère un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & S \\ xy & = & P. \end{array}\right.$$

1. Montrer que le système est équivalent au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & S \\ x^2 - Sx + P & = & 0 \end{array}\right.$$

2. En déduire le résultat énoncé en cours.
3. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 4 \\ xy & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnu x de paramètre réel m

$$x - m \geq \sqrt{x+m}.$$

Exercice 4. Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ ne contenant pas sa borne inférieure m.

1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $m < a < m + \epsilon$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| < \epsilon.$$

   Montrer que l'on peut construire une suite d'éléments de A strictement décroissante convergeant vers m.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement décroissante et minorée par 0. On pose $B = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et qu'elle converge vers la borne inférieure de B.