TD 1 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

Logique élémentaire et théorie naïve des ensembles

Points abordés

— Raisonnements logiques.
— Langage des ensembles
— Types de démonstrations.

---

1 Tables de vérité et propositions

Exercice 1. Donner la négation (et la contraposée si elle existe) des propositions suivantes :

1. Aucun animal n'est plus grand que la baleine bleue.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n \leq m$.
3. Il existe une suite réelle non majorée.
4. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m$.
5. L'entier n est pair et est divisible par trois.
6. $\forall (x, y) \in E^2, (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))$.
7. Si une personne est à ma gauche, alors je suis à sa droite.
8. $P(f, a) : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \epsilon)$.
9. Si un animal se fait manger par un tigre, alors il habite en Asie.

Exercice 2. Imaginez-vous ethnologue. Vous étudiez une peuplade primitive qui présente un comportement manichéen extrême : lorsque plusieurs personnes participent à une même conversation sur un sujet donné, elles vont toutes avoir le même comportement manichéen tant que la conversation reste sur le même sujet, c'est-à-dire que toutes les affirmations seront soit des vérités, soit des mensonges. Par contre, si le sujet de la conversation change, la nature des affirmations, soit mensonge, soit vérité, peut changer, mais toutes les affirmations seront de la même nature tant que le sujet ne changera pas à nouveau. Pour être autorisé à séjourner dans cette peuplade, vous devez respecter cette règle. Vous participez à une conversation avec trois de leurs membres que nous appellerons X, Y et Z. Ceux-ci vous indiquent comment rejoindre leur village. Si vous n'arrivez pas à le rejoindre, vous ne serez pas autorisé à y séjourner.

Le premier sujet abordé est la région dans laquelle se trouve le village :
— X indique : « Le village se trouve dans la vallée » ;
— Z réplique : « Non, il ne s'y trouve pas » ;
— X reprend : « Ou alors dans les collines ».

Nous noterons V et C les variables propositionnelles associées à la région dans laquelle se trouve le village. Nous noterons X_1 et Z_1 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X et de Z sur le premier sujet.

Puis, le second sujet est abordé : le chemin qui permet de rejoindre le village dans la région concernée.
— X dit : « Le chemin de gauche conduit au village » ;
— Z répond : « Tu as raison » ;
— X complète : « Le chemin de droite y conduit aussi » ;
— Y affirme : « Si le chemin du milieu y conduit, alors celui de droite n'y conduit pas » ;
— Z indique : « Celui du milieu n'y conduit pas ».

Nous noterons G, M, D les variables propositionnelles correspondant respectivement au fait que le chemin de gauche, du milieu et de droite, conduit au village. Nous noterons X_2, Y_2 et Z_2 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X, de Y et de Z sur le second sujet.

1. Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le premier sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_1 et Z_1.
2. Représenter les informations données par les participants sous la forme de deux formules du calcul des propositions X_1 et Z_1 dépendant des variables V et C.

3. En utilisant la résolution avec les propriétés des opérateurs booléens et les formules de De Morgan en calcul des propositions, déterminer dans quelle région vous devez vous rendre pour rejoindre le village.
4. Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le second sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_2, Y_2 et Z_2.
5. Représenter les informations données par les participants sous la forme de trois formules du calcul des propositions X_2, Y_2 et Z_2 dépendant des variables G , M et D.
6. En utilisant la résolution avec les tables de vérité en calcul des propositions, déterminer quel chemin vous devez suivre pour rejoindre le village.
7. En admettant que les trois participants aient menti, pouviez-vous prendre d'autres chemins ?

2 Types de démonstrations

Démonstration directe

Exercice 3. Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que :

$$((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \Rightarrow (A \subset C).$$

Exercice 4. On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroissante** si :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, n \leq m \Rightarrow u_n \geq u_m.$$

Considérons la propriété P suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}. \tag{P}$$

1. Montrer que si une suite est décroissante, alors elle vérifie la propriété (P).
2. Montrer que si une suite est décroissante, alors elle est majorée par son premier terme.

Démonstration par la contraposée

Exercice 5. On cherche à démontrer l'implication suivante. Soit x un réel tel que pour tout $\epsilon > 0, x \leq \epsilon$. Alors $x \leq 0$.
1. Écrire la proposition correspondante à l'aide de symboles mathématiques.
2. Écrire la contraposée de l'implication correspondante.
3. Démontrer la proposition contraposée.

Démonstration par disjonction de cas

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x| = x^2 - 1$.

Démontrer une équivalence

Exercice 7. On suppose connu les différentes notions de géométrie vues dans les années précédentes. On rappelle la formule du produit scalaire dans le plan. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On rappelle que :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}).$$

Soit ABC un triangle. Montrer que ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Démonstration par l'absurde

Exercice 8. On veut montrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles. Supposons qu'un tel ensemble existe et notons-le E. En considérant l'ensemble $A = \{X \in E | X \notin X\}$, aboutir à une contradiction.

Exercice 9. Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit qu'elle admet une limite si :

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \epsilon.$$

Démontrer que si une limite l existe alors elle est unique.