TD 1 mathématiques

BCPST 1 2019-2020

Éléments de logique, théorie naïve des ensembles

Points abordés

— Raisonnements logiques.
— Langage des ensembles.

---

1 Tables de vérité et propositions

Exercice 1. Donner la négation (la réciproque et la contraposée si elles existent) des propositions suivantes :

1. Aucun animal n'est plus grand que la baleine bleue.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n \leq m$.
3. Il existe une suite réelle non majorée.
4. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m$.
5. L'entier n est pair et est divisible par trois.
6. $P(f, E) : \forall (x, y) \in E^2, (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))$.
7. $P(f, a) : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \epsilon)$.

Exercice 2. Imaginez-vous ethnologue. Vous étudiez une peuplade primitive qui présente un comportement manichéen extrême : lorsque plusieurs personnes participent à une même conversation sur un sujet donné, elles vont toutes avoir le même comportement manichéen tant que la conversation reste sur le même sujet, c'est-à-dire que toutes les affirmations seront soit des vérités, soit des mensonges. Par contre, si le sujet de la conversation change, la nature des affirmations, soit mensonge, soit vérité, peut changer, mais toutes les affirmations seront de la même nature tant que le sujet ne changera pas à nouveau. Pour être autorisé à séjourner dans cette peuplade, vous devez respecter cette règle. Vous participez à une conversation avec trois de leurs membres que nous appellerons X, Y et Z. Ceux-ci vous indiquent comment rejoindre leur village. Si vous n'arrivez pas à le rejoindre, vous ne serez pas autorisé à y séjourner.

Le premier sujet abordé est la région dans laquelle se trouve le village :
— X indique : « Le village se trouve dans la vallée » ;
— Z réplique : « Non, il ne s'y trouve pas » ;
— X reprend : « Ou alors dans les collines ».

Nous noterons V et C les variables propositionnelles associées à la région dans laquelle se trouve le village. Nous noterons X_1 et Z_1 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X et de Z sur le premier sujet.

Puis, le second sujet est abordé : le chemin qui permet de rejoindre le village dans la région concernée.
— X dit : « Le chemin de gauche conduit au village » ;
— Z répond : « Tu as raison » ;
— X complète : « Le chemin de droite y conduit aussi » ;
— Y affirme : « Si le chemin du milieu y conduit, alors celui de droite n'y conduit pas » ;
— Z indique : « Celui du milieu n'y conduit pas ».

Nous noterons G, M, D les variables propositionnelles correspondant respectivement au fait que le chemin de gauche, du milieu et de droite, conduit au village. Nous noterons X_2, Y_2 et Z_2 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X, de Y et de Z sur le second sujet.

1. Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le premier sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_1 et Z_1.
2. Représenter les informations données par les participants sous la forme de deux formules du calcul des propositions X_1 et Z_1 dépendant des variables V et C.
3. En utilisant la résolution avec les propriétés des opérateurs booléens et les formules de De Morgan en calcul des propositions, déterminer dans quelle région vous devez vous rendre pour rejoindre le village.

4. Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le second sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_2, Y_2 et Z_2.
5. Représenter les informations données par les participants sous la forme de trois formules du calcul des propositions X_2, Y_2 et Z_2 dépendant des variables G , M et D.
6. En utilisant la résolution avec les tables de vérité en calcul des propositions, déterminer quel chemin vous devez suivre pour rejoindre le village.
7. En admettant que les trois participants aient menti, pouviez-vous prendre d'autres chemins ?

Exercice 3. Lors de l'exploration d'un labyrinthe, vous vous retrouvez à une intersections d'où partent trois chemins : à gauche le chemin de terre, au centre le chemin de pierre, à droite le chemin de fer. Sur chacune de ces routes se trouve une pancarte. Voici ce que l'on peut y lire :

1. pancarte de gauche : cette route vous mène directement au trésor. De plus, si le chemin de fer mène au trésor, il en est alors de même du chemin de pierre.
2. Pancarte du centre : ni le chemin de terre, ni le chemin de fer ne mènent au trésor.
3. Pancarte de droite : suivre le chemin de terre mène au trésor, suivre le chemin de fer mène à la mort.

En sachant que tout message apparaissant dans ce labyrinthe est un mensonge, quel chemin choisir pour revenir tout sourire ?

2 Théorie des ensembles

Exercice 4. On pose $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, b\}$. Décrire les ensembles suivants :

1. $A \times B$,
2. $A \cap B$,
3. $A \cup B$.

Exercice 5. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ? Le justifier

1. $\exists A \subset \mathbb{N}, -1 \in A$,
2. $\forall A \subset \mathbb{N}, 0 \in A$,
3. $\forall A \subset \mathbb{N}, \exists m \in A, \forall k \in A, m \leq k$,
4. $\exists m \in \mathbb{N}, \forall A \subset \mathbb{N}, \forall k \in A, m \leq k$,
5. $\forall A \subset \mathbb{N}, \exists m \in A, \forall k \in A, m \geq k$,
6. $\exists A \subset \mathbb{N}, \exists m \in A, \forall k \in A, m \geq k$,

Exercice 6. Pour toute partie A de $\mathbb{N}^\star$, on note :

1. P_1 : 2 est un élément de A,
2. P_2 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est un élément de A alors n est un élément de A,
3. P_3 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est un élément de A alors $(n+5)^2$est un élément de A.

On pose $S = \displaystyle\bigcup_{k \in \{2,3,4,6\}} \{k + 5n, n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que S vérifie P_1, P_2, P_3.
2. Soit T un ensemble vérifiant P_1, P_2, P_3.
   (a) Soit $a \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que si $a \in T$ alors $a + 5 \in T$.
   (b) En déduire P_4 : si a est un élément de T alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a + 5n$ est un élément de T.
   (c) Montrer que si 16 est un élément de T alors $3, 4, 6$ sont des éléments de T.
   (d) Montrer que
   (e) Montrer que 2916 est un élément de T puis que 65536 est un élément de T. On pourra remarquer que 2916 est égal à 54^2.
   (f) En déduire que $3, 4, 6$ sont des éléments de T.
   (g) Prouver alors que $S \subset T$.