# TD 10 Fonctions usuelles

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

**Exercice 1.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$, écrire $f(x)$ sous deux formes.
2. En déduire pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ deux expressions de $f'(x)$.
3. Déduire des questions précédentes une simplification de $\sum_{k=0}^{n} k2^k$.

**Exercice 2.** Déterminer les domaines de définition, les domaines de dérivabilité, et calculer les dérivées des fonctions définies par :

1. $f(x) = \sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}}$, 2. $f(x) = \ln(4\,x+3)$. 3. $f(x) = 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 4. $f(x) = \cos(\sqrt{1+x^3})$
5. $f(x) = \sqrt{|1-x^2|}$ 6. $f(x) = \ln(|x^2-3x+2|)$ 7. $f(x) = \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

**Exercice 3.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{R}^+$. Démontrer en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires que le polynôme $P(X) = X^n - d$ a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 4.** Étudier les fonctions (domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, tableau de variation, limite aux bords, courbe représentative) définies par :

1. $x \longmapsto \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$ 2. $x \longmapsto x + \cos(x)$. 3. $x \longmapsto |2x-1| - |x+2| + 3x$.
4. $x \longmapsto x + \sqrt{|x^2-1|}$. 5. $x \longmapsto |\tan x| + \cos x$. 6. $x \longmapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (à étudier sur $]0, +\infty[$).

**Exercice 5.** pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{2x} + e^x - 1$ et $g(x) = 3x + 1$.

1. Montrer que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, +\infty[$.
3. Déterminer la réciproque de $f$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq g(x)$.
5. Tracer les graphes de $f$ et $g$ sur un même repère.

**Exercice 6.** Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 7.**
1. Étudier brièvement la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et tracer son graphe.
2. Trouver tous les couples $(a, b)$ d'entiers naturels non nuls et distincts vérifiant $a^b = b^a$.

**Exercice 8.** On veut montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2},$$

par des approches différentes.

1. En étudiant la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ montrer l'égalité énoncée.
2. Qu'en est-il pour $x < 0$ ?
3. On fixe $x > 0$. En raisonnant par équivalence, montrer l'égalité revient à prouver que $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x})$ est vraie. En exploitant le fait que arctan est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ démontrer l'égalité énoncée.

**Exercice 9.** Montrer que pour tout $x \in ]0, 1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.