TD 10 Fonctions usuelles

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 4. Étudier les fonctions (domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, tableau de variation, limite aux bords, courbe représentative) définies par :

1. $x \longmapsto \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $x \longmapsto x + \cos(x)$.
3. $x \longmapsto |2x-1| - |x+2| + 3x$.
4. $x \longmapsto x + \sqrt{|x^2-1|}$.
5. $x \longmapsto |\tan x| + \cos x$.
6. $x \longmapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (à étudier sur $]0, +\infty[$).

Correction

3. Étudions la fonction $f : x \mapsto |2x-1| - |x+2| + 3x$. La fonction étant obtenue par sommes et composées de fonctions affines et de la fonction valeur absolue. Elle donc définie et continue sur $\mathbb{R}$. Pour étudier cette fonction, on procède par disjonction de cas pour enlever les valeurs absolues.
   - Cas 1 : sur $]-\infty, -2]$ On a $\forall x \in]-\infty, -2], f(x) = 1 - 2x - (-x-2) + 3x = 2x + 3$
   - Cas 2 : sur $[-2, \frac{1}{2}]$: on a $\forall x \in [-2, \frac{1}{2}], f(x) = -2x + 1 - (x+2) + 3x = -1$
   - Cas 3 : sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$: On a $\forall x \in [\frac{1}{2}, +\infty[, f(x) = 4x - 3$

   La fonction étant donc affine sur chaque intervalle $]-\infty, -2[,]-2, \frac{1}{2}[,]\frac{1}{2}, +\infty[$ elle est alors dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2, \frac{1}{2}\}$. Étudions les variations de f.
   - Cas 1 : sur $]-\infty, -2]$. f étant affine sur cet intervalle et son coefficient directeur étant strictement positif, elle est strictement croissante sur cet intervalle.
   - Cas 2 : sur $[-2, \frac{1}{2}]$ f est constante sur cet intervalle.
   - Cas 3 : sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, f étant affine sur cet intervalle et son coefficient directeur étant strictement positif, elle est strictement croissante sur cet intervalle.

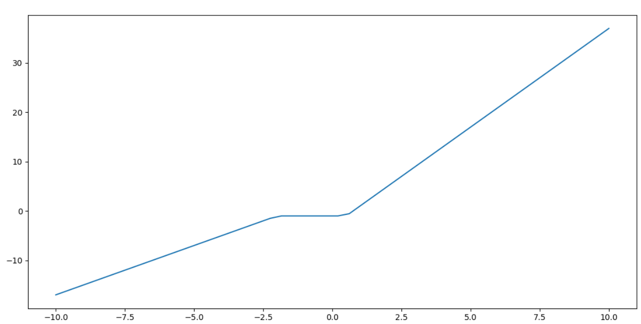


FIGURE 1 – graphe de f

4. Étudions la fonction $f : x \to x + \sqrt{|x^2-1|}$. Une valeur absolue étant toujours positive, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. On a $x^2 - 1 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$. Donc le domaine de dérivabilité de f est $\mathbb{R}\backslash\{1, -1\}$. Calculons sa dérivée :
   - Sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$:
   $$\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, f'(x) = 1 + x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

— sur $]-1,1[$:

$$\forall x \in]-1,1[, f'(x) = 1 - x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Étudions le signe de f'. Soit $x \in \mathbb{R}$.

— Cas 1 : $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f'(x) \geq 0 \quad &\iff \quad \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}+x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} \geq 0 \\
&\iff \quad \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} + x \geq 0 \\
&\iff \quad \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} \geq -x \\
&\iff \quad x \geq 1 \text{ ou } \left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} \geq -x \geq 0 \\
&\iff \quad x \geq 1 \text{ ou } -1 \geq 0 \\
&\iff \quad x \geq 1
\end{aligned}$$

— Cas 2 : $x \in [-1,1]$

$$\begin{aligned}
f'(x) \geq 0 \quad &\iff \quad \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \geq 0 \\
&\iff \quad \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} - x \geq 0 \\
&\iff \quad \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq x \\
&\iff \quad x \in [-1,0] \text{ ou } x \in [0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}] \\
&\iff \quad x \in [-1,\tfrac{1}{\sqrt{2}}]
\end{aligned}$$

On en déduit que f' est négative sur $]-\infty,-1]$ puis f' est positive sur $[-1,\frac{1}{\sqrt{2}}]$ et positive sur $[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty[$. Par conséquent, f est décroissante sur $]-\infty,-1]$ puis f est croissante sur $[-1,\frac{1}{\sqrt{2}}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty[$.

Calcul des limites en $-\infty,+\infty$.

— soit $x<-1$. $f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$. On en déduit que $\lim_{-\infty} f = 0$

— De même, $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

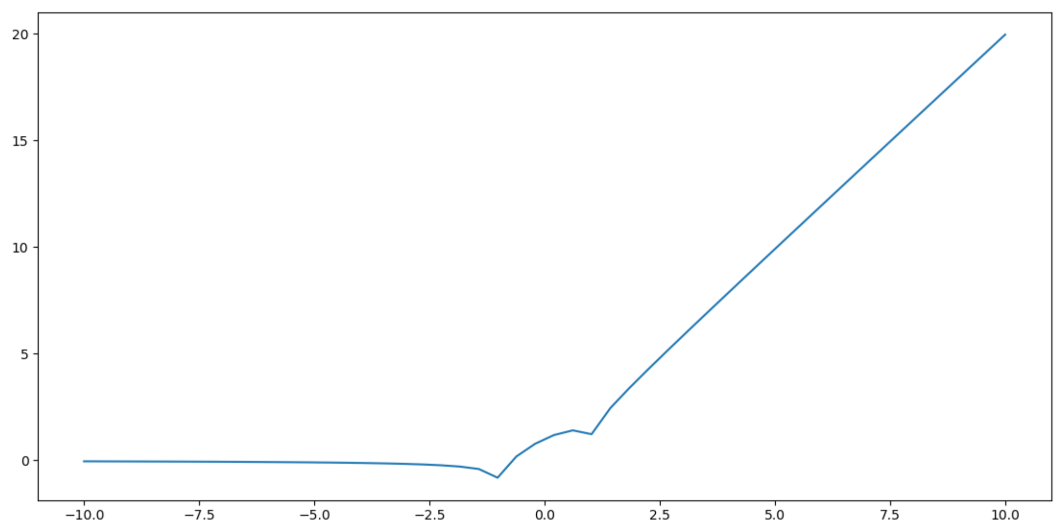


FIGURE 2 – graphe de f

5. Étudions la fonction $f : x \mapsto |\tan(x)| + \cos(x)$. La fonction étant 2π périodique et paire, il suffit de l'étudier sur $[0,\pi]$ puis d'étendre par parité et 2π périodicité. Sur $[0,\pi]$, elle est définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi]$. f est dérivable sur $S =]0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi[$ en tant que composée et somme de fonctions usuelles. Calcul de la dérivée :

$$\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[f'(x) = 1 + \tan(x)^2 - \sin(x) \geq 0.$$

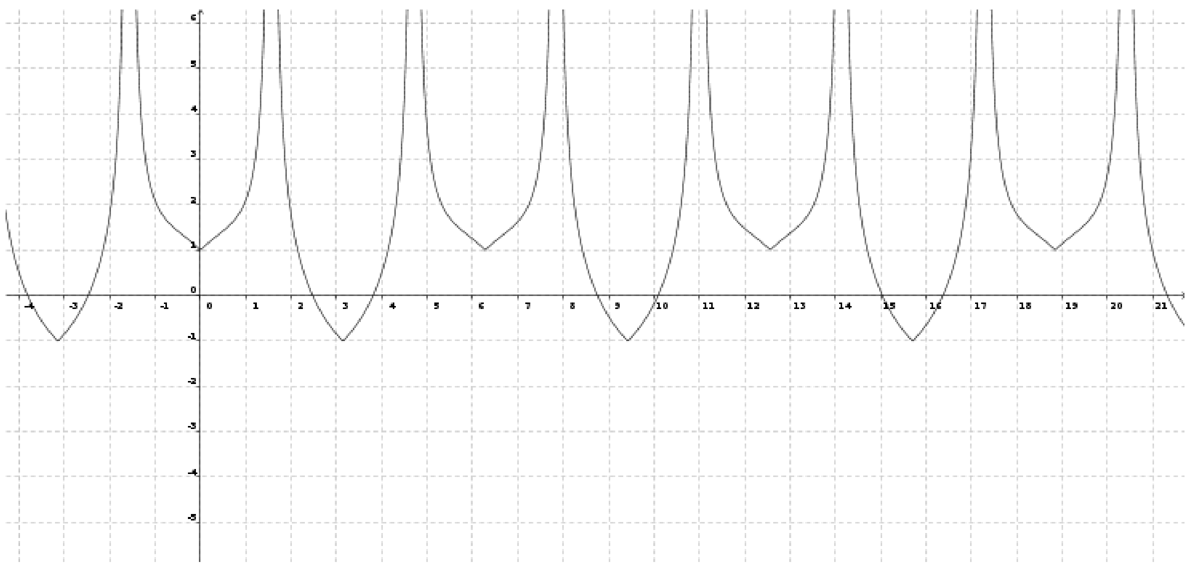
et

$$\forall x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[, f'(x) = -1 - \tan(x)^2 - \sin(x) \leq 0.$$

Calcul des limites : $f(0) = 1, f(\pi) = -1, \lim_{x \to \frac{\pi}{2}, x < \frac{\pi}{2}} = +\infty, \lim_{x \to \frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2}} = +\infty$. On a donc comme tableau de variations sur $[-\pi, \pi]$:

x	1		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	$\vert\vert$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \vert\vert +\infty$	$\searrow$	-1

Graphe :



Exercice 5. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{2x} + e^x - 1$ et $g(x) = 3x + 1$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, +\infty[$.
3. Déterminer la réciproque de f.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq g(x)$.
5. Tracer les graphes de f et g sur un même repère.

Correction

pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{2x} + e^x - 1$ et $g(x) = 3x + 1$.

1. La fonction f étant une somme de fonctions exponentielles et d'une fonction constante, elle est dérivalble sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{2x} + e^x > 0.$$
f est donc une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrons que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, +\infty$. Tout d'abord, calculons les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de f. On a $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$. Par somme et composée de limite, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$. De plus, $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Par opérations usuelles sur les limites, on a donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
À l'aide du théorème de la bijection continue, montrons que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, +\infty$.
   - f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.
   - On a vu que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   - De plus, $\lim_{-\infty} f = -1, \lim_{+\infty} f = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,+\infty[$.

3. Calculons la réciproque de f. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,+\infty[$.

$$f(x) = y \iff e^{2x} + e^x - 1 = y$$

Posons $X = e^x$. On a alors

$$f(x) = y \iff X^2 + X - (1+y) = 0$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 1 + 4(1+y)$. D'où

$$f(x) = y \iff X = \frac{-1-\sqrt{4y+5}}{2} \text{ ou } X = \frac{-1+\sqrt{4y+5}}{2}$$

Or $X = e^x > 0$. Donc

$$f(x) = y \iff X = \frac{-1+\sqrt{4y+5}}{2}.$$

Autrement dit,

$$f(x) = y \iff x = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{4y+5}}{2}\right).$$

La réciproque de f est donc la fonction h définie par :

$$\forall y \in]-1,+\infty[, h(y) = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{4y+5}}{2}\right).$$

4. Étudions le signe de la fonction $l : x \mapsto f(x) - g(x)$. Étant la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, l'(x) = 2e^{2x} + e^x - 3$$

Étudions le signe de l'. Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $X = e^x$.

$$\begin{aligned} l'(x) \geq 0 &\iff 2X^2 + X - 3 \geq 0 \\ &\iff 2(X-1)(X+\tfrac{3}{2}) \geq 0 \end{aligned}$$

Or $X > 0$. D'où

$$l'(x) \geq 0 \iff X \geq 1 \iff x \geq 0$$

l' est donc négative sur $]-\infty,0]$ et est positive sur $[0,+\infty[$. Par conséquent, l est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. Il en résulte que $\forall x \in \mathbb{R}, l(x) \geq l(0)$. Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R}, l(x) \geq 0.$$

D'où, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq g(x)$.

5. Tracer les graphes de f et g sur un même repère.

Exercice 6. Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction

On considère la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Par définition,

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, f(x) = \exp(\frac{\ln(x)}{x}).$$

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme quotient et composée de fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Calculons f' :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}\exp(\frac{\ln(x)}{x}).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit que $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$. Donc

$$\forall x > e, f'(x) < 0, \forall x < e, f'(x) > 0, f'(e) = 0.$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0,e[$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. La plus grande valeur est donc entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt[3]{3}$. Ces nombres étant positifs, il suffit de comparer leur puissance sixième. On a alors respectivement 8 et 9. Donc $\sqrt[3]{3}$ est le plus grand.

Exercice 7. 1. Étudier brièvement la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et tracer son graphe.

2. Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls et distincts vérifiant $a^b = b^a$.

Correction

1. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas.
   On a
   $$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$
   On en déduit que f est strictement croissante sur $]0, e[$ et décroissante sur $[e, +\infty[$.
2. On veut $a^b = b^a \leftrightarrow e^{a\ln(b)} = e^{b\ln(a)} \leftrightarrow a\ln(b) = b\ln(a)$.
   Ce qui est équivalent à $\frac{\ln(b)}{b} = \frac{\ln(a)}{a}$.
   En calculant les premières valeurs et avec les variations de la fonction f, en déduit que les couples sont $(2, 4)$ et $(4, 2)$.

Exercice 8. On veut montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2},$$
par des approches différentes.

1. En étudiant la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ montrer l'égalité énoncée.
2. Qu'en est-il pour $x < 0$?
3. On fixe $x > 0$. En raisonnant par équivalence, montrer l'égalité revient à prouver que $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x})$ est vraie. En exploitant le fait que arctan est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ démontrer l'égalité énoncée.

Correction

1. Pour tout $x > 0$, on pose :
   $$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}).$$
   f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée et somme de fonctions déribalble sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et
   $$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)}.$$
   Simplifions cette expression. Soit $x > 0$.
   $$\frac{1}{1+x^2} - \left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$
   Autrement dit,
   $$\forall x > 0, f'(x) = 0$$
   $\mathbb{R}^{+\star}$ étant un intervalle, on en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2}..$$
2. En procédant de façon similaire, on constate que f est constante sur $\mathbb{R}^{-\star}$ et
   $$\forall x < 0, f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$
3. On fixe $x > 0$. Par définition, $\arctan(x) \in]0, \frac{\pi}{2}$. De plus, $\frac{1}{x} > 0$. Donc $\arctan(\frac{1}{x}) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x}) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ Or tan réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}^{+\star}$. Donc
   $$\begin{aligned}
   \arctan(x) = \tfrac{\pi}{2} - \arctan(\tfrac{1}{x}) &\iff x = \tan(\tfrac{\pi}{2} - \arctan(\tfrac{1}{x}))\\
   &\iff x = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x}))}{\cos(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x}))}\\
   &\iff x = \frac{\cos(\arctan(\frac{1}{x}))}{\sin(\arctan(\frac{1}{x}))}\\
   &\iff x = \frac{1}{\frac{\sin(\arctan(\frac{1}{x}))}{\cos(\arctan(\frac{1}{x}))}}\\
   &\iff x = \frac{1}{\tan(\arctan(\frac{1}{x}))}\\
   &\iff x = \frac{1}{\frac{1}{x}}\\
   &\iff x = x
   \end{aligned}$$
   Cette dernière égalité étant vraie, par équivalence, on en déduit que la première l'est.

Exercice 9. Montrer que pour tout $x \in]0,1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Correction

Étudtions la fonction $f : x \mapsto \ln(x^x(1-x)^{1-x})$. Par propriétés sur le logarithme, on a :

$$\forall x \in]0,1[, f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x).$$

La fonction f est dérivable sur $]0,1[$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur leur ensemble de définition. De plus,

$$\forall x \in]0,1[, f'(x) = \ln(x) - \ln(1-x).$$

Donc, pour tout $x \in]0,1[$,

$$f'(x) \geq 0 \iff w \geq \frac{1}{2}..$$

f' est donc négative sur $]0, \frac{1}{2}]$ et positive sur $[\frac{1}{2}, 1[$. f est donc décroissante sur $]0, \frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}, 1[$. Donc

$$\forall x \in]0,1[, f(x) \geq f(\frac{1}{2})..$$

En passant à l'exponentielle, on en déduit que $\forall x \in]0,1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.