TD 12 Dérivées, primitives, étude de fonctions

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^5 + x + 1 \end{array}$$

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à déterminer.
3. Montrer que la réciproque f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer une équation de la tangente de $C_{f^{-1}}$ en $(1, f^{-1}(1))$.

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(\tan(x)) \end{array}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que la fonction est π-périodique.
3. À l'aide de la dérivée de f, étudier les variations de la fonction f.
4. Montrer que f réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle à déterminer.
5. Montrer que la réciproque f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter f^{-1}.
6. Tracer les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

Exercice 3. Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x\ln(x)$ 2. $x \mapsto xe^{x^2}$ 3. $x \mapsto \frac{3x^2+1}{x^3+x+1}$ 4. $x \mapsto \cos(x)^3\sin(x)$. 5. $x \mapsto \ln(1+x^2)$ 6. $x \mapsto 3x(1+2x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Exercice 4. On cherche une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^3+2x-3}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, x^3 + 2x - 3 = (x-1)(x^2+x+3)$.
2. En déduire le domaine de définition D_f de f.
3. Déterminer a, b, c des réels vérifiant $\forall x \in D_f, \frac{1}{x^3+2x-3} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+3}$
4. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+3}$.
5. On veut déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+3}$. Pour cela, on fixe $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tout $a > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{a}\arctan(\frac{t}{a})$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2+a^2}$.
   (b) Calculer $\int_0^x \frac{1}{t^2+t+3}dt$. On pourra effectuer le changement de variable $u = t + \frac{1}{2}$.
   (c) En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+3}$.
6. Déduire des questions précédentes une primitive de f.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n dx.$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}. On pourra effectuer une intégration par parties.
3. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n.

Exercice 6. On fixe $x > 0$. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable :

1. $\int_{\ln(2)}^x \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt$ (Poser $u = \sqrt{e^t-1}$) 2. $\int_0^x \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}dt$ (Poser $u = e^t$) 3. $\int_e^x \frac{1}{t\ln(t)}dt$ (Poser $u = \ln(t)$)