TD 13 : Calculs matriciels

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Le ou lesquels des produits suivants est (sont) bien défini(s) ? AB, BA, AA, BB.
2. Dans le cas où un produit existe, le calculer.

Exercice 2. On pose $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -7 & -2 \\ -11 & 3 & 2 \\ -7 & -13 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Calcler D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 3. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nI_3$ et déterminer une relations de récurrence entre a_{n+1}, b_{n+1} a_n et b_n.
2. en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de a_n et de b_n.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
5. À l'aide de la formule du binôme, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^{-n}.

Exercice 4.
1. Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures de taille n. Montrer que AB est une matrice triangulaire supérieure.
2. Soit D une matrice diagonale. Montrer que D est inversible si et seulement si tous les coefficients diagonaux sont non nuls.
3. Soit A une matrice carrée à coefficients réels de taille n. Montrer que ${}^tAA = 0_{n,n}$ si et seulement si A est la matrice nulle.

Correction

Soit A une matrice carrée de taille n. Montrons que ${}^tAA = 0_{n,n}$ si et seulement si $A = 0_{n,n}$. Démontrons cette proposition par double implication.

— Supposons que $A = 0_{n,n}$. On a donc ${}^tAA = 0_{n,n}$.

— Supposons que ${}^tAA = 0_{n,n}$. Montrons que $A = 0_{n,n}$. On a :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} ({}^tAA)_{ii} = 0$$

Autrement dit,

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \sum_{k=1}^{n} {}^tA_{ik}A_{ki} = 0$$

D'où

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \sum_{k=1}^{n} A_{ki}^2 = 0$$

Or les A_{ki} étant réels, leur carré est positif. Et une somme de nombres tous positifs donnant 0 entraîne que tous ces nombres sont nuls. Ainsi :

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \forall k \in \{1,2,\ldots,n\} A_{ki}^2 = 0.$$

Donc

$$\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \forall k \in \{1,2,\ldots,n\} A_{ki} = 0.$$

A est donc la matrice nulle.

L'équivalence est bien démontrée.

Exercice 5. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer l'inverse.

Correction

Avec la méthode du pivot, on trouve :

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. On veut calculer de deux manière différentes l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que B est inversible à l'aide de la méthode du pivot.
2. Calculer $(B - I_3)^3$. En déduire que B est inversible et calculer l'inverse.

Correction

1. Après calcul, on trouve : $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On constate que $(B - I_3)^3 = 0_{3,3}$. De plus, $BI = IB$. Donc :

$$B^3 - 3B^2 + 3B - I = 0_{3,3}.$$

D'où $B(B^2 - 3B + 3I) = I$ et $(B^2 - 3B + 3I)B = I$.
B est donc bien inversible et $B^{-1} = B^2 - 3B + 3I$.