

TD 14 : équations différentielles

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y' + 5$ 2. $y'' = y' + y$ 3. $y'' - 3y' + 9y = 0$ 4. $y'' + y' + y = 4$

Exercice 2. On fixe $a \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = e^{ax} \quad (1)$$

1. Résoudre l'équation homogène correspondante.
2. On suppose $a \neq 1$. Déterminer une solution de (1) sous la forme $x \mapsto \lambda e^{ax}$. En déduire toutes les solutions de cette équation.
3. On suppose $a = 1$. Déterminer une solution sous la forme $x \mapsto \lambda x^2 e^x$. En déduire toutes les solutions de (1).
4. En déduire les solutions de l'équation

$$y'' + 2y' + y = e^x + 3e^{2x}.$$

Exercice 3. On présente différents modèles de dynamique de population. On note $N(t)$ le nombre d'individus à l'instant $t \geq 0$, et N_0 correspond au nombre d'individus à l'instant $t = 0$.

1. Dans cette question, on considère le modèle de Malthus. Dans celui-ci, on fixe $r > 0$, qui correspond à un taux de croissances de la population. Ainsi, on a

$$N' = rN.$$

Résoudre cette équation différentielle.

Ce modèle est une bonne approximation lorsque que l'on a un développement d'une population sans frein. En particulier, lorsque l'on a une espèce invasive celle-ci a un développement exponentiel.

2. Lorsque l'on regarde à long terme, on constate qu'une population peut également au départ croître rapidement, puis aura tendance à stationner après le développement initial. Malthus propose le modèle suivant dans ce cas :

$$N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

où $r > 0$ et $K > 0$. r représente le taux de croissance intrinsèque de la population et K la capacité biotique.

En posant $Z = \frac{K}{N}$, montrer que Z vérifie une équation linéaire.

3. En déduire N en fonction du temps.
4. Discuter suivant la valeur de la population initiale $N(0) = N_0$ et de l'évolution en fonction du temps.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 4y = f$$

1. Résoudre l'équation homogène correspondante.
2. On suppose que f est de la forme $x \mapsto \cos(3x)$. Déterminer une solution de la forme $x \mapsto A \cos(3x) + B \sin(3x)$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation.
3. On suppose que f est de la forme $x \mapsto e^{2x}$. Déterminer une solution de la forme $x \mapsto \lambda x^2 e^{2x}$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation.

Exercice 5. On considère le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} y' &= \frac{1}{2}y - 17z \\ z' &= \frac{1}{4}y + \frac{3}{2}z \end{cases} \quad (S)$$

avec comme conditions initiales : $y(0) = 1, z(0) = 2$.

1. Soit (y, z) solution de de (S). Montrer que y et z vérifient l'équation

$$f''' - 2f' + 5f = 0. \quad (E)$$

2. En déduire le ou les couples solutions de l'équation (S).