TD 14 : équations différentielles

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y' + 5$ 2. $y" = y' + y$ 3. $y" - 3y' + 9y = 0$ 4. $y" + y' + y = 4$

Exercice 2. On fixe $a \in \mathbb{R}$. On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y" + 2y' + y = e^{ax} \tag{1}$$

1. Résoudre l'équation homogène correspondante.
2. On suppose $a \neq 1$. Déterminer une solution de (1) sous la forme $x \mapsto \lambda e^{ax}$. En déduire toutes les solutions de cette équation.
3. On suppose $a = 1$. Déterminer une solution sous la forme $x \mapsto \lambda x^2 e^x$. En déduire toutes les solutions de (1).
4. En déduire les solutions de l'équation
$$y" + 2y' + y = e^x + 3e^{2x}.$$

Exercice 3. On présente différents modèles de dynamique de population. On note $N(t)$ le nombre d'individus à l'instant $t \geq 0$,et N_0 correspond au nombre d'individus à l'instant $t = 0$.

1. Dans cette question, on considère le modèle de Malthus. Dans celui-ci, on fixe $r > 0$, qui correspond à un taux de croissances de la population. Ainsi, on a
$$N' = rN.$$
Résoudre cette équation différentielle.
Ce modèle est une bonne approximation lorsque que l'on a un développement d'une population sans frein. En particulier, lorsque l'on a une espèce invasive celle-ci a un développement exponentiel.
2. Lorsque l'on regarde à long terme, on constate qu'une population peut également au départ croître rapidement, puis aura tendance à stationner après le développement initial. Malthus propose le modèle suivant dans ce cas :
$$N' = rN(1 - \frac{N}{K}),$$
où $r > 0$ et $K > 0$. r représente le taux de croissance intrinsèque de la population et K la capacité biotique.
En posant $Z = \frac{K}{N}$, montrer que Z vérifie une équation linéaire.
3. En déduire N en fonction du temps.
4. Discuter suivante la valeur de la population initiale $N(0) = N_0$ et de l'évolution en fonction du temps.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$y" - 4y' + 4y = f$$

1. Résoudre l'équation homogène correspondante.
2. On suppose que f est de la forme $x \mapsto \cos(3x)$. Déterminer une solution de la forme $x \mapsto A\cos(3x) + B\sin(3x)$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation.
3. On suppose que f est de la forme $x \mapsto e^{2x}$. Déterminer une solution de la forme $x \mapsto \lambda x^2 e^{2x}$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation.

Exercice 5. On considère le système d'équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \frac{1}{2}y - 17z \\ z' & = & \frac{1}{4}y + \frac{3}{2}z \end{array} \right. \tag{S}$$

avec comme conditions initiales : $y(0) = 1, z(0) = 2$.

1. Soit (y, z) solution de de (S). Montrer que y et z vérifient l'équation
$$f" - 2f' + 5f = 0. \tag{E}$$
2. En déduire le ou les couples solutions de l'équation (S).

Correction

On considère le système d'équations différentielles :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & \frac{1}{2}y - 17z \\ z' & = & \frac{1}{4}y + \frac{3}{2}z \end{array}\right. \tag{S}$$

avec comme conditions initiales : $y(0) = 1, z(0) = 2$.

1. Soit (y, z) solution de de (S). Montronss que y et z vérifient l'équation
$$f" - 2f' + 5f = 0. \tag{E}$$
On a $y' = \frac{1}{2}y - 17z$. Donc $y" = \frac{1}{2}y' - 17z'$. Or $z' = \frac{1}{4}y + \frac{3}{2}z$. D'où $y" = \frac{1}{2}y' - 17(\frac{1}{4}y + \frac{3}{2}z)$. Donc :
$$y" = \frac{1}{2}y' - \frac{17}{4}y - \frac{3}{2}17z$$
or $17z = \frac{1}{2}y - y'$. D'où
$$y" = \frac{1}{2}y' - \frac{17}{4}y - \frac{3}{2}(\frac{1}{2}y - y')$$
Donc
$$y" = 2y' - 5y$$
D'où $y" - 2y' + 5y = 0$.
De la même façon, on a $z" = \frac{1}{4}y' + \frac{3}{2}z'$. D'où
$$z" = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}y - 17z) + \frac{3}{2}z'..$$
Or $\frac{1}{4}y = z' - \frac{3}{2}z$. Donc $\frac{1}{2}y = 2z' - 3z$. D'où
$$z" = \frac{1}{4}(2z' - 3z - 17z) + \frac{3}{2}z'.$$
D'où $z" = 2z' - 5z$. Donc $z" - 2z' + 5z = 0$.
2. On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - 2x + 5 = 0$ ayant pour solutions $x_1 = 1 + 2i, x_2 = 1 - 2i$. Il en résulte que y, z s'écrivent :
$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (A\cos(4t) + B\sin(4t))e^{2t}, z(t) = (C\cos(4t) + D\sin(4t))e^{2t}.$$
Déterminons A, B, C, D à l'aide des conditions initiales : $y(0) = 1, z(0) = 2$. On a donc $y'(0) = -\frac{67}{2}, z'(0) = \frac{13}{4}$.
D'où $A = 1, B = -\frac{71}{8}, C = 2, D = -\frac{3}{16}$.
On a ainsi un unique couple solution possible de cette équation. Après calculs, en posant $y : t \mapsto (\cos(4t) - \frac{71}{8}\sin(4t))e^{2t}, z : t \mapsto (2\cos(4t) - \frac{3}{16}\sin(4t))e^{2t}$ on obtient une solution de l'équation.