

TD 15 statistiques et suites

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. On a mis une mole d'un gaz dans un cylindre maintenu à une température constante égale à $300K$.

Voici la pression mesurée pour différents volumes :

V (litres)	10	15	20	25	30	35
P (bars)	2,4	1,9	1,3	0,97	0,81	0,71

1. Calculer la moyenne, l'écart-type pour la pression.
2. Existe-t-il une corrélation entre ces deux grandeurs ?
3. Déterminer une régression linéaire.
4. À quelle loi semble obéir ce gaz ?
5. Déterminer la constante correspondante.

Exercice 2. Lors d'une étude de cinétique chimique, les mesures obtenues ont été les suivantes :

t (secondes)	0	1,2	3	6	9	12	15	18	24
$[I_2](mmol.l^{-1})$	20	12	10	5,4	2,8	1,4	0,75	0,4	0,1

1. Tracer le nuage de points. La régression linéaire est-elle pertinente ?
2. Effectuer un changement de variable pour obtenir une régression linéaire qui convient mieux.

Exercice 3. Une loi biologique stipule que le nombre d'espèces N est corrélé avec une surface S habitable de la manière suivante :

$$N = CS^z.$$

Surface S	1	2	4	8	16	32	64
Nombre d'espèces	6	7	8	10	10	13	14

1. Déterminer N, C, z .

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}$, g_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, g_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln(x).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier les variations de g_n . Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence d'un réel positif α_n unique tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \alpha_n < e^2$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$. Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n . En déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.
5. Montrer que la suite de terme général α_n est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x - \ln(x)}{2\sqrt{x}}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

1. On pose $J = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{2x - \ln(x)}{2\sqrt{x}} dx$. Calculer $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} dx$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire J .
2. Soient $n \geq 1, k \in \{0, \dots, n-1\}$. À l'aide des variations de f , montrer que

$$\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right).$$

3. En déduire que

$$\forall n \geq 1, U_n - \frac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \frac{f(1)}{n}.$$

4. Montrer que $(U_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.