TD 15 statistiques et suites

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. On a mis une mole d'un gaz dans un cylindre maintenu à une température constante égale à $300K$.

Voici la pression mesurée pour différents volumes :

V (litres)	10	15	20	25	30	35
P (bars)	2,4	1,9	1,3	0,97	0,81	0,71

1. Calculer la moyenne, l'écart-type pour la pression.
2. Existe t-il une corrélation entre ces deux grandeurs ?
3. Déterminer une régression linéaire.
4. À quelle loi semble obéir ce gaz ?
5. Déterminer la constante correspondante.

Exercice 2. Lors d'une étude de cinétique chimique, les mesures obtenues ont été les suivantes :

t (secondes)	0	1,2	3	6	9	12	15	18	24
$[I_2](mmol.l^{-1})$	20	12	10	5,4	2,8	1,4	0,75	0,4	0,1

1. Tracer le nuage de points. La régression linéaire est-elle pertinente ?
2. Effectuer un changement de variable pour obtenir une régression linéaire qui convient mieux.

Exercice 3. Une loi biologique stipule que le nombre d'espèces N est corrélé avec une surface S habitable de la manière suivante :

$$N = CS^z.$$

Surface S	1	2	4	8	16	32	64
Nombre d'espèces	6	7	8	10	10	13	14

1. Déterminer N, C, z.

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}$, g_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, g_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln(x).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier les variations de g_n. Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence d'un réel positif α_n unique tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \alpha_n < e^2$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$. Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n. En déduire que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.
5. Montrer que la suite de terme général α_n est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x - \ln(x)}{2\sqrt{x}}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f(1 + \frac{k}{n}).$$

1. On pose $J = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{2x - \ln(x)}{2\sqrt{x}}$. Calculer $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}dx$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire J.
2. Soient $n \geq 1$, $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. À l'aide des variations de f, montrer que

$$\frac{1}{n}f(1 + \frac{k}{n}) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f(1 + \frac{k+1}{n}).$$

3. En déduire que

$$\forall n \geq 1, U_n - \frac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \frac{f(1)}{n}.$$

4. Montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Correction

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-\ln(x)}{2\sqrt{x}}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f(1+\frac{k}{n}).$$

1. FAIT
2. Constatons que f est croissante sur $[1,+\infty[$. Soit $n \geq 1$. Soit $k \in \{0,\dots,n-1\}$, f est croissante sur $[1+\frac{k}{n}, 1+\frac{k+1}{n}]$. Donc :

$$\forall x \in [1+\frac{k}{n}, 1+\frac{k+1}{n}], f(1+\frac{k}{n}) \leq f(x) \leq f(1+\frac{k+1}{n})..$$

Par croissance de l'intégrale et en intégrant sur $[1+\frac{k}{n}, 1+\frac{k+1}{n}]$:

$$\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(1+\frac{k}{n}) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \frac{1}{n} f(1+\frac{k+1}{n}).$$

D'où

$$\frac{1}{n} f(1+\frac{k}{n}) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f(1+\frac{k+1}{n}).$$

3. Soit $n \geq 1$. On a

$$\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}, \frac{1}{n} f(1+\frac{k}{n}) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f(1+\frac{k+1}{n}).$$

Donc, en sommant sur $\{0,1,\dots,n-1\}$, on obient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(1+\frac{k}{n}) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(1+\frac{k+1}{n})$$

D'où, en utilisant la relation de Chasles et la définition de U_n :

$$U_n - \frac{1}{n} f(2) \leq \int_1^2 f(x)dx \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$$

4. De l'inégalité précédente, on en déduit que

$$\forall n \geq 1, \int_1^2 f(x)dx + \frac{f(1)}{n} \leq U_n \leq \int_1^2 f(x)dx + \frac{f(2)}{n}.$$

En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} U_n = J$.