TD 16 suites et convergence

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Déterminer un équivalent simple (de la forme $\lambda q^n n^\alpha$) de

1. $\frac{2^n \ln(n)+3^n}{4^n+\cos(n)}$ 2. $\frac{n^3-n^2+3}{\sqrt{n}+3}$ 3. $(1+\frac{1}{n})^n$ 4. $\sin(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}$

5. $\sum_{k=1}^n k$. 6. $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{5}} - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{3}{5}}$ 7. $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 8. $[n^2+3n-1]$

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 3. On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1, v_0 = 2, u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n+v_n}, v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{u_n+v_n}.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissent. En déduire qu'elles convergent vers ℓ et ℓ' respectivement. Montrer que l'on a $\ell\ell' = 0$.
3. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire ℓ et ℓ'.

Exercice 4. Étudier les suites définies par :

1. $u_0 \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1-u_n)$ 2. $u_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(e-1+u_n)$.

Exercice 5. 1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'équation $\tan(x) + x = n$ d'inconnue $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ admet une unique solution.

2. Étudier la convergenge de la suite (x_n) et déterminer sa limite dans le cas où elle existe.

Exercice 6. L'objectif est d'étudier la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n dx. \tag{1}$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. On pourra effectuer une intégration par parties.
4. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$
5. Trouver une formule analogue pour I_{2n+1}.
6. Montrer que pour tout entier n supérieur à 2, on a :
$$1 \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{I_{n-2}}{I_n} \leq \frac{n}{n-1}.$$
En déduire la limite de $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
7. Montrer que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante, et déterminer celle-ci. En déduire que la suite $(nI_n^2)_{n\geq 1}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.
8. Déterminer un équivalent de $(I_n)_{n\geq 1}$ et de $(\binom{2n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ sous la forme $Cq^n n^\alpha$.