TD 16 suites et convergence

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Déterminer un équivalent simple (de la forme $\lambda q^n n^\alpha$) de

1. $\frac{2^n \ln(n)+3^n}{4^n+\cos(n)}$ 2. $\frac{n^3-n^2+3}{\sqrt{n}+3}$ 3. $(1+\frac{1}{n})^n$ 4. $\sin(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}$

5. $\sum_{k=1}^n k$. 6. $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{5}} - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{3}{5}}$ 7. $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 8. $[n^2+3n-1]$

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 3. On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1, v_0 = 2, u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n+v_n}, v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{u_n+v_n}.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissent. En déduire qu'elles convergent vers ℓ et ℓ' respectivement. Montrer que l'on a $\ell\ell' = 0$.
3. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire ℓ et ℓ'.

Exercice 4. Étudier les suites définies par :

1. $u_0 \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1-u_n)$ 2. $u_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(e-1+u_n)$.

Correction

Éléments de correction :

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,1[$. Puis, constater que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$. La suite est donc décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente. En passant à la limite dans la récurrence, montrer la seule limite possible est 0. La suite converge donc vers 0.
2. On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \geq 0, f(x) = \ln(e-1+x)$. On peut remarquer que la fonction est continue et croissante sur son ensemble de définition. De plus : $\forall x \in [0,1], f(x) \leq f(1) = 1$. On peut remarquer que $u_0 = 0 \leq 1$, $u_1 = \ln(e-1) \leq \ln(e-1+1) = 1$. Donc $u_0 \leq u_1 \leq 1$. Par croissance de f on a donc $f(u_0) \leq f(u_1) \leq f(1)$. Autrement dit, $u_1 \leq u_2 \leq 1$. Par récurrence, peut alors montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

   On en déduit que la suite est croissante et majorée par 1. De plus, elle converge vers l'unique point $x \geq 0$ vérifiant $f(x) = x$, car f est continue. Or $x = 1$. On en déduit que la limite est égale à 1.

   Pour avoir des intuitions sur ce genre de problème, tracer le graphe de f avec la droite d'équation $y = x$.

Exercice 5. 1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'équation $\tan(x) + x = n$ d'inconnue $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ admet une unique solution.

2. Étudier la convergence de la suite (x_n) et déterminer sa limite dans le cas où elle existe.

Correction

Éléments de correction :

1. On pose : $\begin{array}{cccc} f: &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x)+x \end{array}$ En remarquant que f est strictement croissante et continue et en calculant ses limites aux bornes, on peut utiliser le corollaire du TVI et montrer qu'il existe un unique $x_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant $f(x_n) = n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on remarque que $f(x_n) = n, f(x_{n+1}) = n+1$ et f étant strictement croissante, on en déduit que $x_n < x_{n+1}$. La suite (x_n) est donc croissante. De plus, elle est majorée par $^2\frac{\pi}{2}$ par construction. Donc elle converge. Pour trouver sa limite : on constate que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$. Si la limite de (x_n) que l'on note l vérifie $l < \frac{\pi}{2}$, on aurait une absurdité car f serait continue en l, et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$. Donc, nécessairement, $l \geq \frac{\pi}{2}$. Par majoration de la suite, on sait que $l \leq \frac{\pi}{2}$. Donc on a $l = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 6. L'objectif est d'étudier la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n dx. \qquad (1)$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. On pourra effectuer une intégration par parties.
4. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$
5. Trouver une formule analogue pour I_{2n+1}.
6. Montrer que pour tout entier n supérieur à 2, on a :
$$1 \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{I_{n-2}}{I_n} \leq \frac{n}{n-1}.$$
En déduire la limite de $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
7. Montrer que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante, et déterminer celle-ci. En déduire que la suite $(nI_n^2)_{n\geq 1}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.
8. Déterminer un équivalent de $(I_n)_{n\geq 1}$ et de $(\binom{2n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ sous la forme $Cq^n n^\alpha$.

Correction

L'objectif est d'étudier la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n dx. \qquad (2)$$

Éléments de correction :

1. $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\forall x \in\in [0, \frac{\pi}{2}], 0 \leq \cos(x)^{n+1} \leq \cos(x)^n$ car $\cos(x) \in [0, 1]$. En intégrant sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$
3. Fixer $n \in \mathbb{N}$. Poser $u : x \mapsto \sin(x), v : \cos(x)^{n+1}$. Constater que $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)dx$, intégrer par parties puis se rappeler des formules de trigonométrie. Reconnaître I_n, I_{n+2}.
4. Démontrer la proposition par récurrence et utiliser la formule de la question 3.
5. $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}$.
6. Des calculs précédents, on sait que (I_n) est décroissante. Donc
$$I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}.$$
De plus, I_n est positif et ne s'annule pas. D'où
$$1 \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{I_{n-2}}{I_n}$$
Mais d'après 3, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Donc
$$1 \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{I_{n-2}}{I_n} \leq \frac{n}{n-1}$$
à l'aide du théorème des gendarmes et des calculs de limite, on en conclut que le quotient $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ tend vers 1.
7. Reprendre l'égalité de la question 3 pour en déduire que cette suite est constante et égale à $\frac{\pi}{2}$. D'après la question précédente, on sait que $I_n \sim I_{n-1}$, on peut alors en déduire que nI_n^2 tend vers $\frac{\pi}{2}$.
8. Sans détailler les calculs :
$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$
Indication : faire apparaître dans I_{2n} le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ et calculer avec les équivalents.