TD 17 Géométrie

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. On fixe un repère orthonormé du plan $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer :

1. la droite passant par $A = (2,3)$ et $B = (1,-1)$;
2. une équation de la droite parallèle à la droite d'équation $x + y - 2 = 0$ passant par $A = (3,2)$;
3. la distance du point $A = (3,2)$ à la droite d'équation $x + y - 2 = 0$;
4. une représentation paramétrique de la droite d'équation $2x - y + 7 = 0$;
5. l'intersection de la droite d'équation $x - y + 1 = 0$ avec la droite d'équation $2x - y + 7 = 0$, on pourra utiliser la représentation paramétrique calculée précédemment ;
6. (a) une équation cartésienne pour la droite ayant comme représentation paramétrique
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 + 3t \\ y & = & -2 - t \end{array} \right.$$
   (b) un vecteur normal à cette droite ;
   (c) un vecteur directeur à cette droite.
7. L'intersection entre le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x - y - 3 = 0$ avec la droite d'équation $x + y - 2 = 0$.
8. Déterminer les coordonnées du barycentre de $A = (1,2)$, $B = (-1,3)$ et $C = (2,0)$ respectivement affectés des poids $1, 2, -4$.

Exercice 2. Dans la suite, on se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. Soient A, B deux points du plan tel que $||\overrightarrow{AB}|| = 6$. On note I le milieu de $[A;B]$.

1. On pose $\mathcal{C} = \{M \in \mathbb{R}^2 | \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -4\}$
   (a) Soit $M \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow MI^2 = 5$
   (b) Décrire l'ensemble $\mathcal{C}$ en terme de figure géométrique et le dessiner
2. On pose $\mathcal{D} = \{M \in \mathbb{R}^2 | ||\overrightarrow{MA}|| = ||\overrightarrow{MB}||\}$.
   (a) Soit $M \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
   (b) Décrire l'ensemble $\mathcal{D}$ en terme de figure géométrique et le dessiner.

Exercice 3. Soient A, B, C trois points du plan non alignés, A', B', C' les milieux respectifs de A, B, C. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle et G son centre de gravité. On rappelle que G est caractérisé par la propriété suivante :
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Soit H le point défini par
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

1. Démontrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires.
3. En déduire que (AH) est une hauteur du triangle ABC puis que H est l'orthocentre de ABC.
4. Soit M un point quelconque de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
5. Déduire des questions précédentes que O, G, H sont alignés. La droite passant par ces trois points est appelée droite d'Euler.

Exercice 4. On fixe un repère orthonormé de l'espace $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Déterminer :

1. une représentation paramétrique de l'intersection du plan d'équation $2x + 3y - z + 10 = 0$ et du plan $x - y - z = 0$;
2. une représentation paramétrique du plan d'équation $2x + 3y - z + 10 = 0$.
3. la distance du point $A = (1, -2, 1)$ au plan ayant comme représentation paramétrique :

$$\begin{array}{rcl} x & = & 3 + t - t' \\ y & = & 1 + 2t - 3t' \\ z & = & -1 + 5t + t' \end{array}$$

   où t, t' sont des réels. On pourra déterminer une équation cartésienne de ce plan.
4. Déterminer l'intersection du plan précédent avec la droite ayant comme représentation paramétrique

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1 - t \\ y & = & 1 + t \\ z & = & 2 + 3t \end{array}$$

   où t est un réel.
5. Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique du plan engendré par les points $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 1, 3)$, $C = (1, 1, 1)$.
6. Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique du plan engendré par le point $A = (0, 2, 1)$ et par la droite ayant comme vecteur directeur $(3, -1, 2)$ et passant par le point $(1, 3, -1)$.