TD 18 Polynômes

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. L'objectif de cet exercice est de montrer que :

$$P(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k. \tag{T}$$

1. Montrer que le membre droit est bien un polynôme.
2. Montrer que si P et Q vérifient l'identité (T), alors $P+Q$ vérifie aussi (T).
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que si P vérifie (T), alors λP vérifie (T)
4. On suppose $a = 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'identité est vraie pour X^k. En déduire que l'identité est vraie pour $a = 0$ et pour tout polynôme.
5. À l'aide d'un changement de variable, montrer que l'identité est vraie pour tout polynôme P et tout $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 2. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{x^2} \end{array}$$

On rappelle que $f^{(n)}$ désigne la dérivée n^{e} de f.

1. Montrer qu'il existe P_n un polynôme tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}.$$
2. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.
3. Calculer P_0, P_1, P_2.
4. Déterminer le degré de P_n en fonction de n.
5. On note a_n le coefficient dominant de P_n. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. En déduire la valeur de a_n en fonction de n.

Exercice 3. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On veut déterminer toutes les racines de $P(X) = X^n - a^n$.

1. Cas 1 : $a = 0$. Factoriser $X^n - a^n$ en produits de polynômes de degré 1 dans ce cas.
2. Cas 2 : $a = 1$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, $P(e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = 0$.
   (b) En déduire toutes les racines de $X^n - 1$.
   (c) En déduire une factorisation (en produits de degré 1) de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Cas 3 : $a \neq 0, 1$. À l'aide d'un changement de variable déduire des questions précédentes une factorisation en produits de degré 1 de $X^n - a^n$.
4. Factoriser en produits de degré 1 le polynôme $X^n + 1$.

Exercice 4. Soit P un polynôme vérifiant $P(X + 2\pi) = P(X)$. On pose $Q(X) = P(X) - P(0)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, Q(2n\pi) = 0$.
2. En déduire que le polynôme Q est nul et que le polynôme P est constant.
3. Montrer que la fonction sin ne peut pas être un polynôme.