TD 19 Probabilités

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Les candidats à un examen proviennent de 4 lycées A, B, C, D, à raison de 20% pour A, de 25% pour B, de 15% pour C, de 40% pour D. A enregistre 35% de succès, B 30%, C 50%, D 45%. Déterminer les probabilités qu'un candidat reçus proviennent de A, B, C, D.

Exercice 2. On considère deux urnes d'aspects identiques, dont la première contient 90 boules blanches et 10 boules noires, tandis que la deuxième contient 90 boules noires et 10 boules blanches. On tire au hasard une boule de l'une des deux urnes sans savoir laquelle et on constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité que l'on ait tiré la boule dans la première urne ?

Exercice 3. Un livre a une probabilité p de se trouver dans une commode comportant k tiroirs et des chances égales de se trouver dans chacun de ces tiroirs.

1. On ouvre les $k-1$ premiers tiroirs sans le trouver. Quelle est la probabilité de le trouver dans le dernier tiroir ?
2. Soit $j \in \{2, \cdots, k-1\}$. On ouvre les $k-j$ premiers tiroirs, sans le trouver ; quelle est la probabilité de le trouver dans le dernier tiroir ? dans l'un des j derniers tiroirs ?

Exercice 4. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges. On considère le protocole suivant : Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. Pour tout $k \in \{1, \cdots, 2n-1\}$, on note A_k l'événement “le premier roi rouge apparaît au rang k”.

Calculer pour tout $k \in \{1, ..., 2n-1\}$, la probabilité $P(A_k)$.

Exercice 5. Le quart d'une population est vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés, et qu'il y a un malade sur 12 parmi les vaccinés. Quel est la probabilité qu'un non vacciné tombe malade ? Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 6. Urne de Polya. L'expérience est la suivante : une urne contient au départ 1 boule blanche et 1 boule rouge. On tire une boule puis on la remet avec une autre boule de la même couleur. On répète n fois cette opération et on note X_n le nombre de boules blanches à l'issue de ces n tirage. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X_n = k)$ désigne l'événement “à l'issue des n tirages, il y a k boules blanches dans l'urne”.

1. Déterminer le nombre de boules dans l'urne après n tirages.
2. Pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, calculer $P(X_k = j)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \{1, \cdots, n+1\}$, $P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$.
4. Déterminer la probabilité de l'événement B_{n+1} “tirer une boule blanche au $n+1^{\text{e}}$ tirage”.

Exercice 7. On considère une urne contenant 5 boules rouges, 5 boules noires, 5 boules vertes et 5 boules blanches. On tire une à une toutes les boules de l'urne, les tirages étant effectués sans remise. Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, 20\}$, on note A_k l'événement ”à l'issue du k^{e} tirage, toutes les couleurs ont été piochées mais pas avant”. On veut déterminer la probabilité de l'événement A_k.

1. Justifier que pour tout $k \in \{1, 2, 3, 17, 18, 19, 20\}, P(A_k) = 0$.
2. Déterminer les probabilités de A_4, A_{16}.
3. Pour tout $k \in \{5, 6, \ldots, 15\}$, calculer la probabilité de A_k.