TD 19 Probabilités

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Les candidats à un examen proviennent de 4 lycées A, B, C, D, à raison de 20% pour A, de 25% pour B, de 15% pour C, de 40% pour D. A enregistre 35% de succès, B 30%, C 50%, D 45%. Déterminer les probabilités qu'un candidat reçus proviennent de A, B, C, D.

Exercice 2. On considère deux urnes d'aspects identiques, dont la première contient 90 boules blanches et 10 boules noires, tandis que la deuxième contient 90 boules noires et 10 boules blanches. On tire au hasard une boule de l'une des deux urnes sans savoir laquelle et on constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité que l'on ait tiré la boule dans la première urne ?

Exercice 3. Un livre a une probabilité p de se trouver dans une commode comportant k tiroirs et des chances égales de se trouver dans chacun de ces tiroirs.

1. On ouvre les $k-1$ premiers tiroirs sans le trouver. Quelle est la probabilité de le trouver dans le dernier tiroir ?
2. Soit $j \in \{2, \cdots, k-1\}$. On ouvre les $k-j$ premiers tiroirs, sans le trouver ; quelle est la probabilité de le trouver dans le dernier tiroir ? dans l'un des j derniers tiroirs ?

Exercice 4. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges. On considère le protocole suivant : Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. Pour tout $k \in \{1, \cdots, 2n-1\}$, on note A_k l'événement "le premier roi rouge apparaît au rang k".

Calculer pour tout $k \in \{1, ..., 2n-1\}$, la probabilité $P(A_k)$.

Exercice 5. Le quart d'une population est vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés, et qu'il y a un malade sur 12 parmi les vaccinés. Quel est la probabilité qu'un non vacciné tombe malade ? Le vaccin est-il efficace ?

Correction

On note V l'événement "être vacciné" et M l'événement "être malade". Par hypothèses, on a : $P(V) = \frac{1}{4}, P(M|V) = \frac{1}{12}, P(V|M) = \frac{1}{5}$. On cherche à calculer $P(M|\overline{V})$. Par définition, $P(M|\overline{V}) = \frac{P(M\cap\overline{V})}{P(\overline{V})}$. En appliquant la formule des probabilités composées au numérateur :

$$P(M|\overline{V}) = \frac{P(M)P(\overline{V}|M)}{P(\overline{V})}.$$

Or V et $\overline{V}$ formant un système complet d'événements, on en déduit que $P(M) = P\left(M \cap \overline{V}\right) + P\left(M \cap V\right) = P(M|\overline{V})P(\overline{V}) + P(M|V)P(V)$. D'où

$$P(M|\overline{V}) = \frac{P(M \cap \overline{V})}{P\left(M \cap \overline{V}\right) + P\left(\overline{V} \cap \overline{M}\right)}.$$

En remplaçant par les différentes valeurs et expressions,

$$P(M|\overline{V}) = \frac{\left(\frac{3}{4}P(M|\overline{V}) + \frac{1}{48}\right)\frac{4}{5}}{\frac{1}{4}}$$

En résolvant l'équation, on trouve $P(M|\overline{V}) = \frac{1}{9}$. En comparaison, on $P(M|V) = \frac{1}{12}$. Le vaccin a un certain effet, mais rien de probant.

Exercice 6. Urne de Polya. L'expérience est la suivante : une urne contient au départ 1 boule blanche et 1 boule rouge. On tire une boule puis on la remet avec une autre boule de la même couleur. On répète n fois cette opération et on note X_n le nombre de boules blanches à l'issue de ces n tirage. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X_n = k)$ désigne l'événement "à l'issue des n tirages, il y a k boules blanches dans l'urne".

1. Déterminer le nombre de boules dans l'urne après n tirages.
2. Pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$, pour tout $j \in \{1,2,3,4\}$, calculer $P(X_k = j)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \{1, \cdots, n+1\}$, $P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$.
4. Déterminer la probabilité de l'événement B_{n+1} "tirer une boule blanche au $n+1^{\text{e}}$ tirage".

Correction

1. À l'issue de n tirages, l'urne contient exactement $n+2$ boules.
2. Pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$, pour tout $j \in \{1,2,3,4\}$, on constate que $P(X_k = j)\frac{1}{k+1}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$Q(n) : \forall k \in \{1,2,\ldots,n+1\}, P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

Montrons Q par récurrence.

— Initialisation : d'après la question 1, $Q(0)$ est vraie.

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $Q(n)$ est vraie. Montrons que $Q(n+1)$ l'est.
Soit $k \in \{1,2,\ldots,n+1\}$. La famille $(X_n = k)_{1 \leq l \leq n+1}$ formant un système complet d'événements, on a :

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{l=1}^{n+1} P\left((X_{n+1} = k) \cap (X_n = l)\right).$$

Sachant qu'à chaque tirage on rajoute au plus une boule blanche, de nombreux termes de la somme sont nuls. On a donc :

$$P(X_{n+1} = k) = P\left((X_{n+1} = k) \cap (X_n = k)\right) + P\left((X_{n+1} = k) \cap (X_n = k-1)\right).$$

Distinguons 3 cas.

(a) $k = 1$. On a alors :

$$\begin{array}{rcll} P\left(X_{n+1} = 0\right) & = & P\left((X_{n+1} = 0) \cap (X_n = 0)\right) & \\ & = & P\left(X_n = 0\right) P\left(X_{n+1} = 0 | X_n = 0\right) & \\ & = & \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2} & \begin{array}{l}\text{d'après } Q(n) \text{ et il y a } n+1 \text{ boules rouges} \\ \text{pour } n+2 \text{ boules au total si on sait que } X_n = 0\end{array} \\ & = & \frac{1}{n+2} & \end{array}.$$

(b) $k = n+2$. On a alors :

$$\begin{array}{rcll} P\left(X_{n+1} = n+2\right) & = & P\left((X_{n+1} = n+2) \cap (X_n = n+1)\right) & \\ & = & P\left(X_n = n+1\right) P\left(X_{n+1} = n+2 | X_n = n+1\right) & \\ & = & \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2} & \begin{array}{l}\text{d'après } Q(n) \text{ et il y a} \\ n+1 \text{ boules blanches} \\ \text{pour } n+2 \text{ boules au total} \\ \text{si on sait que } X_n = n+1\end{array} \\ & = & \frac{1}{n+2} & \end{array}.$$

(c) $2 \leq k \leq n$ Dans ce cas :

$$P(X_{n+1} = k) = P\left(X_n = k\right) P\left((X_{n+1} = k) \,|\, (X_n = k)\right) + P\left(X_n = k-1\right) P\left((X_{n+1} = k) \,|\, (X_n = k-1)\right).$$

D'après $Q(n)$ et en comptant le nombre de boules rouges et blanches dans les différentes configurations, on trouve :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1}\frac{n+2-k}{n+2} + \frac{1}{n+1}\frac{k-1}{n+2}.$$

D'où $P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+2}$.

$Q(n+1)$ est donc vraie.

— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$ est vraie.

4. La famille $(X_n = k)_{1\leq k\leq n+1}$ étant un système complet d'événements :

$$P(B_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} P(B_{n+1} \cap (X_n = k)).$$

Donc

$$P(B_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} P(X_n = k)P(B_{n+1}|\,(X_n = k)).$$

D'où :

$$\begin{array}{rcl} P(B_{n+1}) & = & \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1}\frac{k}{n+2} \\ & = & \frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n+1} k \\ & = & \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)(n+2)} \\ & = & \frac{1}{2} \end{array}.$$

Ce qu'il y a de remarquable est que cette probabilité correspond à la proportion de boules blanches initiale de l'urne.

Exercice 7. On considère une urne contenant 5 boules rouges, 5 boules noires, 5 boules vertes et 5 boules blanches. On tire une à une toutes les boules de l'urne, les tirages étant effectués sans remise. Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, 20\}$, on note A_k l'événement "à l'issue du k^{e} tirage, toutes les couleurs ont été piochées mais pas avant". On veut déterminer la probabilité de l'événement A_k.

1. Justifier que pour tout $k \in \{1, 2, 3, 17, 18, 19, 20\}$, $P(A_k) = 0$.
2. Déterminer les probabilités de A_4, A_{16}.
3. Pour tout $k \in \{5, 6, \dots, 15\}$, calculer la probabilité de A_k.

Exercice 8. On considère une urne contenant 5 boules rouges, 5 boules noires, 5 boules vertes et 5 boules blanches. On tire une à une toutes les boules de l'urne, les tirages étant effectués sans remise. Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, 20\}$, on note A_k l'événement "à l'issue du k^{e} tirage, toutes les couleurs ont été piochées mais pas avant". On veut déterminer la probabilité de l'événement A_k.

1. Justifier que pour tout $k \in \{1, 2, 3, 17, 18, 19, 20\}$, $P(A_k) = 0$.
2. Déterminer les probabilités de A_4, A_{16}.
3. Pour tout $k \in \{5, 6, \dots, 15\}$, calculer la probabilité de A_k.

Correction

On considère une urne contenant 5 boules rouges, 5 boules noires, 5 boules vertes et 5 boules blanches. On tire une à une toutes les boules de l'urne, les tirages étant effectués sans remise. Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, 20\}$, on note A_k l'événement "à l'issue du k^{e} tirage, toutes les couleurs ont été piochées mais pas avant". On veut déterminer la probabilité de l'événement A_k.

1. Pour $k \leq 3$, on ne pioche pas encore assez de boules. Pour $k \geq 17$, chaque couleur étant représentée exactement 5 fois, à l'issue du 15^{e} tirages au moins trois couleurs ont été piochés. Dans le cas où on n'a pas encore pioché les 4 couleurs, on aura alors pioché toutes les boules de ces couleurs. Il nous reste alors dans l'urne la dernière couleur à piocher au rang 16. Ainsi, avant 17 strictement, toutes les couleurs ont été piochées.
2. On procède (par exemple) par dénombrement. On numérote les boules.

   Ainsi, les boules de l'urne sont $R_1, \dots, R_5, N_1, \dots, N_5, \dots, B_5$. L'ensemble de ces boules est noté $\mathcal{B}$. On pose alors $\Omega = \{\text{permutations de } \mathcal{B}\}$. On munit Ω de la probabilité uniforme.

   Dénombrons tous les éléments de A_4. On choisit d'abord les valeurs pour les quatre premières posititions. Comme il y a 5 valeurs possibles par couleur, on a donc 5^4 choix pour les valeurs. Ensuite, on place ces valeurs dans les 4 positions, ce qui fait 4! dispositions possibles. Ainsi, le cardinal de A_4 est donc égal à $5^4 4!$. D'où : $P(A_4) = \frac{5^4 4!}{20!}$

   Dénombrons A_{16}. Il y a 4 façons de choisir la dernière couleur. Constatons alors que les 5 dernières boules ont la même couleur. Ce qui fait 5! façons de les diposer. Les 15 autres boules se répartissent sur 15 positions différentes, ce qui donne 15! manières de les disposer. Ainsi, le cardinal de A_{16} est égal à 5!15!. Ainsi :

   $$P(A_{16}) = \frac{4 \cdot 5!15!}{20!}.$$
3. Soit $k \in \{5, \dots, 15\}$. On procède par disjonction de cas.

— $k \in \{12, \dots, 15\}$. Dans les $k-1$ premières positions apparaissent nécessairement au moins 3 couleurs. On commence par fixer une couleur pour la position k. Ce qui donne 4 possibilités. Pour cette couleur, il y a 5 valeurs possibles. On a donc 20 possibilités pour la position k. Ensuite, pour les $k-1$ premières positions, on doit les choisir parmi les boules de couleurs différente de celles de la position k. Ce qui donne : $15 \cdot 14 \cdot \dots (15-(k-2)) = \frac{15!}{(16-k)!}$

il nous reste alors à placer $(20-k)$ valeurs dans $(20-k)$ emplacements. Ce qui en fait $(20-k)!$

Le cardinal de A_k est donc égal à $\frac{4 \cdot 5 \cdot 15!(20-k)!}{(16-k)!}$ D'où :

$$P(A_k) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 15!(20-k)!}{(16-k)!20!}.$$

— $k \in \{7, \dots, 11\}$. Dans ce cas, au moins deux couleurs apparaissent dans les $k-1$ premiers tirages. Si on effectue le même raisonnement que précédemment, on constate que le nombre $\frac{4 \cdot 5 \cdot 15!(20-k)!}{(16-k)!}$ correspond au nombre de configurations où la troisième ou quatrième couleur apparaît pour la première fois en position k. Il suffit donc de retrancher à ce nombre le cardinal de l'ensemble où la troisième couleur apparaît pour la première fois en position k.

En raisonnant de façon similaire : 4 choix possibles pour la troisième couleur et 5 valeurs possibles. 3 choix possibles pour les deux premières couleurs. Puis on détermine les différentes dispositions comme précédemment. Pour les $k-1$ premières valeurs on a alors $\frac{10!}{(11-k)!}$ et pour la fin, on a $(20-k)!$ façons de disposer. Ce qui donne $\frac{4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10!(20-k)!}{(11-k)!}$.

On en déduit que le cardinal de A_k est égal $\frac{4 \cdot 5 \cdot 15!(20-k)!}{(16-k)!} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10!(20-k)!}{(11-k)!} = 20 \cdot (20-k)! \left(\frac{15!}{(16-k)!} - \frac{3 \cdot 10!}{(11-k)!} \right)$ D'où

$$P(A_k) = \frac{20 \cdot (20-k)! \left(\frac{15!}{(16-k)!} - \frac{3 \cdot 10!}{(11-k)!} \right)}{20!}.$$

— $k\{5, 6\}$.

Le premier calcul, $\frac{4 \cdot 5 \cdot 15!(20-k)!}{(16-k)!}$ correspond encore une fois à l'apparition d'une nouvelle couleur en position k.

Le deuxième calcul, $\frac{4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10!(20-k)!}{(11-k)!}$ ne correspond pas tout à fait au nombre de possibilités où en position k la nouvelle couleur apparaissant est la deuxième ou troisième couleur. En effet, les éléments suivants et eux seuls sont comptés deux fois : avant la position k il y a une unique couleur. Le nombre de tels éléments est égal à $\frac{5!4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (20-k)!}{(6-k)!}$. Ainsi, le nombre d'éléments dont la deuxième ou troisième couleur apparaît exactement en position k est égal à :

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10!(20-k)!}{(11-k)!} - \frac{5!4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (20-k)!}{(6-k)!}.$$

On en déduit que le cardinal de A_k est égal à

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 15!(20-k)!}{(16-k)!} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10!(20-k)!}{(11-k)!} + \frac{5!4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (20-k)!}{(6-k)!} = 20 \cdot (20-k)! \left(\frac{15!}{(16-k)!} - \frac{3 \cdot 10!}{(11-k)!} + \frac{5! \cdot 3}{(6-k)!} \right).$$

Donc :

$$P(A_k) = \frac{20 \cdot (20-k)! \left(\frac{15!}{(16-k)!} - \frac{3 \cdot 10!}{(11-k)!} + \frac{5! \cdot 3}{(6-k)!} \right)}{20!}.$$

Note : l'exercice n'était pas forcément évident.