TD 2 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

Ensembles et récurrences

Exercice 1. Soient E un ensemble, A et B des parties de E. On appelle différence symétrique de A et de B la partie :

$$A\Delta B = \{x \in E | (x \in A, x \notin B) \text{ ou } (x \in B, x \notin A)\}.$$

1. Déterminer la différence symétrique de $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ et de $B = \{2, 5, 6, 7, 10\}$.
2. Soient A, B, C trois ensembles.
   (a) Montrer que $(A\Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$.
   (b) Montrer que $(A\Delta B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.
   (c) Montrer que $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$.
   (d) Montrer que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Exercice 2. Soit A, B, C trois ensembles. On suppose que $A \cup B$ est inclus dans $A \cup C$ et $A \cap B$ est inclus dans $A \cap C$. Comparer B et C.

Exercice 3. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Que dire des égalités suivantes :
— $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
— $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Exercice 4.

1. Soit q un réel différent de 1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

2. Soient a et b deux réels avec $a \neq b$. Montrer que l'on a :

$$\big(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}\big) = a^n - b^n.$$

Exercice 5.

1. Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$(n - 1)a^n + b^n \geq na^{n-1}b,$$

   l'égalité ayant lieu si et seulement si $a = b$.

2. Soit $a_1, \cdots, a_n$ des réels strictement positifs. En posant :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_i}{n}, a = A_{n-1}^{\frac{1}{n}}, b = a_n^{\frac{1}{n}},$$

   montrer que l'on a :

$$A_n \geq A_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} a_n^{\frac{1}{n}}.$$

3. Montrer par récurrence que :

$$A_n \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 6. On définit la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} & F_0 & = & 0 \\ & F_1 & = & 1 \\ \forall n \geq 2, & F_n & = & F_{n-1} + F_{n-2}, \end{array}\right.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} F_n^2 & + & F_{n+1}^2 & = & F_{2n+1} \\ \\ 2F_{n+1}F_n & + & F_{n+1}^2 & = & F_{2n+2} \end{array}\right.$$

Exercice 7. On appelle nombres de Motzkin la suite définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} M_0 & = & 1 \\ M_{n+1} & = & M_n + (M_0 M_{n-1} + M_1 M_{n-2} + \cdots + M_{n-1} M_0)\,,\ \text{si } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Calculer M_0, M_1, M_2.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, M_n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 8. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + 8n \end{array}\right.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1, u_n = (2n-1)^2$.