

TD 2 mathématiques

BCPST 1 2019-2020

Ensembles et récurrences

Exercice 1. Soient E un ensemble, A et B des parties de E . On appelle différence symétrique de A et de B la partie :

$$A\Delta B = \{x \in E \mid (x \in A, x \notin B) \text{ ou } (x \in B, x \notin A)\}.$$

1. Décrire la différence symétrique de $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ et de $B = \{2, 5, 6, 7, 10\}$.
2. Soient A, B, C trois ensembles.
 - (a) Montrer que $(A\Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$.
 - (b) Montrer que $(A\Delta B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.
 - (c) Montrer que $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$.
 - (d) Montrer que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Exercice 2. Soient A, B, C trois ensembles. On suppose que $A \cup B$ est inclus dans $A \cup C$ et $A \cap B$ est inclus dans $A \cap C$. Comparer B et C .

Exercice 3. Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Que dire des égalités suivantes :

- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
- $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Exercice 4. On considère la suite définie par récurrence de la manière suivante :

$$u_0 = 1, u_1 = -2, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 .
2. Conjecturer une formule pour u_n , où $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 5. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 8n \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \geq 1, u_n = (2n - 1)^2$.

Exercice 6. Montrer que pour tout entier naturel n , le nombre S_n défini par

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

est un entier. On pourra raisonner par récurrence.

Exercice 7. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose

$$P(n) : \forall (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in [1, +\infty[^n, 2^{n-1}(a_1 a_2 \dots a_n + 1) \geq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n).$$

On veut montrer que P est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

1. Montrer que $P(2)$ est vraie.
2. Montrer que P est une propriété héréditaire.
3. Conclure.