TD 20 limites et continuité

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Déterminer la limite ou montrer la non existence de la limite de :

1. $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor e^x$ en $+\infty$
2. x^x en 0^+
3. $e^{x-\sin(x)}$ en $+\infty$, $-\infty$
4. $\sin(\frac{1}{x})$ en 0
5. $\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+4}\right)^x$ en $+\infty$
6. $\frac{\lfloor x^2+x-1 \rfloor}{3x^2+2x-1}$ en $+\infty$
7. $\cos(e^x)$ en $+\infty$
8. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$
9. $x^2 \ln \cos \frac{1}{x}$ en $+\infty$
10. $x\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ en $+\infty$
11. $\frac{|x|}{\sin(x)}$ en 0
12. $\frac{(e^x-1)x}{\cos(x)-1}$ en 0
13. $\frac{(1+\frac{1}{x})^\alpha - 1}{(1-\frac{1}{x})^\beta - 1}$ en $+\infty$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$
14. $x \sin(\frac{1}{x})$ en 0
15. $(\ln(e+x))^{1/x}$ en 0
16. $\cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0.

Exercice 2. Déterminer un équivalent simple de :

1. $\frac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$
2. $\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}$ en $+\infty$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$
3. $\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x^4+3}-x^2}$ en $+\infty$
4. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})} \ln(\frac{x}{x+1})$ en $+\infty$
5. $\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$ en $+\infty$.

Exercice 3. Prolonger en 0 par continuité les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$;
2. $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}$
3. $x \mapsto \frac{\sqrt{1-x^2}-\cos(x)}{x^2}$;
4. $\frac{a^x-b^x}{x}$, avec $a > 0, b > 0$.

Exercice 4.
1. Soit P la fonction polynomiale définie par : $P(x) = x^{18} + x^{13} - 3x^2 + 1$. Montrer que P admet un minimum global.
2. De manière générale, montrer que tout polynôme de degré pair de coefficient dominant strictement positif admet un minimum global.

Exercice 5. On considère l'équation en fonction d'un paramètre réel $t > 0$ suivante :

$$x^5 + tx + 1 = 0. \tag{1}$$

1. Soit $t > 0$. Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation (1).
2. Soit $t > 0$. On définit $f(t)$ comme étant le réel tel que :

$$f(t)^5 + tf(t) + 1 = 0.$$

3. Montrer que f est strictement monotone.
4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
5. Déterminer les limites aux bornes de f.