TD 20 limites et continuité

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Déterminer la limite ou montrer la non existence de la limite de :

1. $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor e^x$ en $+\infty$
2. x^x en 0^+
3. $e^{x-\sin(x)}$ en $+\infty$, $-\infty$
4. $\sin(\frac{1}{x})$ en 0
5. $\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+4}\right)^x$ en $+\infty$
6. $\frac{\lfloor x^2+x-1 \rfloor}{3x^2+2x-1}$ en $+\infty$
7. $\cos(e^x)$ en $+\infty$
8. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$
9. $x^2 \ln \cos \frac{1}{x}$ en $+\infty$
10. $x\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ en $+\infty$
11. $\frac{|x|}{\sin(x)}$ en 0
12. $\frac{(e^x-1)x}{\cos(x)-1}$ en 0
13. $\frac{(1+\frac{1}{x})^\alpha - 1}{(1-\frac{1}{x})^\beta - 1}$ en $+\infty$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$
14. $x \sin(\frac{1}{x})$ en 0
15. $(\ln(e+x))^{1/x}$ en 0
16. $\cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0.

Correction

1. Déterminons la limite de $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor e^x$ en $+\infty$: Pour tout $x > 1$, $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$. Donc
$$\forall x > 1, \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor e^x = 0.$$
La limite est donc nulle.
2. Déterminons la limite de x^x en 0^+ : Pour tout $x > 0$, $x^x = e^{x\ln(x)}$. Or $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et $\lim_{u\to 0} e^u = 1$. Par composition, on en déduit que $\lim_{x\to 0} x^x = 1$.
3. Calulons d'abord la limite de $e^{x-\sin(x)}$ en $+\infty$, on a :
$$\forall x > 0, x - 1 \leq x - \sin(x).$$
Or $\lim_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$. Donc par comparaison, $\lim_{x\to+\infty} x - \sin(x) = +\infty$. En composant, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin(x)} = +\infty$
Calulons la limite de $e^{x-\sin(x)}$ en $-\infty$ On a :
$$\forall x < 0, x - \sin(x) \leq x + 1.$$
Or $\lim_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$. Donc par comparaison, $\lim_{x\to-\infty} x - \sin(x) = -\infty$ En composant, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty} e^{x-\sin(x)} = 0$
4. Montrons que $\sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose : $u_n = \frac{1}{2n\pi}, v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. On a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sin(\frac{1}{u_n}) = 0, \sin(\frac{1}{v_n}) = 1.$$
Ces deux suites ayant des limites différentes, on en conclut que $x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.
5. Pour tout x assez grand, on a :
$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+4}\right)^x &= \left(\frac{x-1}{x-4}\right)^x \\ &= e^{x\ln\left(\frac{x-1}{x-4}\right)} \end{aligned}.$$
Mais :
$$\ln\left(\frac{x-1}{x-4}\right) = \ln\left(\frac{x-4+3}{x-4}\right) = \ln\left(1 + \frac{3}{x-4}\right).$$
En calculant les équivalents :
$$\ln\left(1 + \frac{3}{x-4}\right) \sim_{+\infty} \frac{3}{x-4}.$$

D'où

$$x\ln\left(1+\frac{3}{x-4}\right)\sim_{+\infty}\frac{3x}{x-4}\sim_{+\infty}3.$$

$x\ln\left(1+\frac{3}{x-4}\right)$ a donc comme limite 3 en $+\infty$. la fonction exp étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit par composition que l'expression de départ a pour limite e^3.

6. Pour tout x assez grand :

$$\lfloor x^2+x-1\rfloor\leq x^2+x-1\leq\lfloor x^2+x-1\rfloor-1.$$

Donc

$$x^2+x-2\leq\lfloor x^2+x-1\rfloor\leq x^2+x-1.$$

En divisant par $3x^2+2x-1$, on obtient :

$$\frac{x^2+x-2}{3x^2+2x-1}\leq\frac{\lfloor x^2+x-1\rfloor}{3x^2+2x-1}\leq\frac{x^2+x-1}{3x^2+2x-1}. \tag{I}$$

Un polynôme étant équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré, on en déduit que

$$\frac{x^2+x-2}{3x^2+2x-1}\sim_{+\infty}\frac{x^2}{3x^2}\sim_{+\infty}\frac{1}{3},\frac{x^2+x-1}{3x^2+2x-1}\sim_{+\infty}\frac{x^2}{3x^2}\sim_{+\infty}\frac{1}{3}.$$

Par conséquent, les membres gauche et droit des inégalités (I) ayant pour limite $\frac{1}{3}$ on en déduit d'après le théorème d'encadrement que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\lfloor x^2+x-1\rfloor}{3x^2+2x-1}=\frac{1}{3}$.

7. Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, posons : $u_n=\ln(2n\pi), v_n=\ln\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$ On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$: $\cos(e^{u_n})=\cos(2n\pi)=1, \cos(e^{v_n})=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=0$. Les suites images ayant des limites différentes, on en déduit que $\cos\circ\exp$ n'a pas de limite en $+\infty$.

8. Pour tout x assez grand, on a :

$$\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(\frac{\ln(x)}{x})}.$$

Posons $u=\ln(x)$. On a alors $x=e^u$. On obtient comme expression en u :

$$e^{e^{-u}\ln\left(\frac{u}{e^u}\right)}=e^{\frac{\ln(u)}{e^u}-\frac{u}{e^u}}.$$

Lorsque $x\to+\infty$, u tend cers $+\infty$. Par croissances comparées, $\frac{\ln(u)}{e^u}$ et $\frac{u}{e^u}$ tendent vers 0 lorsque u tend vers $+\infty$. Donc par composition de limites, l'expression initiale tend vers 1.

9. Pour tout x assez grand, on a :

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\ln\left(1+\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right).$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1=0$ et $\ln(1+u)\sim_0 u$. Donc

$$\ln\left(1+\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)\sim_{+\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1.$$

De plus, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\cos(u)-1\sim_0\frac{-u^2}{2}$. D'où

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\sim_{+\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\sim_{+\infty}\left(\frac{-1}{2x^2}\right).$$

En multipliant par x^2, on en déduit que l'expression initiale a pour limite $-\frac{1}{2}$.

10. Pour tout x assez grand, on a :

$$x\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)=xe^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)=xe^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right).$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$ et $\lim_{u\to0}e^u=1$. Donc $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x+1}}=1\neq0$. Cette expression est donc équivalent à sa limite. De plus, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x+1)}=0$ et $e^u-1\sim_0 u$. Donc

$$xe^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)\sim_{+\infty}x\cdot\frac{1}{x(x+1)}.$$

D'où

$$xe^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)\sim_{+\infty}\frac{1}{x}.$$

$\frac{1}{x}$ étant de limite nulle en $+\infty$, on en déduit que l'expression initiale est également de limite nulle.

11. On a $\sin(x) \sim_0 x$. D'où :

$$\frac{|x|}{\sin(x)} \sim_0 \frac{|x|}{x}.$$

Pour tout $x > 0$, on a $\frac{|x|}{x} = 1$. Donc $\frac{|x|}{\sin(x)}$ a pour limite à droite 1 en O. $\frac{|x|}{x} = -1$. Donc $\frac{|x|}{\sin(x)}$ a pour limite à gauche -1 en 0. La limite à gauche étant différente de la limite à droite, on en déduit que ce quotient n'a pas de limite en 0.

12. En appliquant les différentes formules sur les équivalents et par produits et quotient on obtient

$$\frac{(e^x - 1)\,x}{\cos(x) - 1} \sim_0 \frac{x \cdot x}{-\frac{x^2}{2}} \sim_0 -2.$$

La limite en 0 de l'expression est donc -2.

13. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0. De plus, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(1+u)^a - 1 \sim_0 au$. Par conséquent,

$$\frac{(1+\frac{1}{x})^{\alpha} - 1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\beta} - 1} \sim_{+\infty} \frac{\frac{\alpha}{x}}{\frac{-\beta}{x}} \sim_0 \frac{-\alpha}{\beta}.$$

14. Pour tout $x \neq 0$:

$$0 \leq |x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|.$$

Lorsque x tend vers 0, $|x|$ tend vers 0. Donc d'après le théorème des gendarmes, $|x \sin(\frac{1}{x})|$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Il en résulte que $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

15. Pour x assez proche de 0 et non nul :

$$\ln{(e+x)}^{\frac{1}{x}} = \left(\ln\left(e(1+\frac{x}{e}\right)\right)^{\frac{1}{x}}.$$

D'où

$$\ln{(e+x)}^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right).$$

On a :

$$\ln\left(1+\frac{x}{e}\right) \sim_0 \frac{x}{e}.$$

Donc

$$x\ln\left(1+\frac{x}{e}\right) \sim_0 \frac{1}{e}.$$

Autrement dit, $\lim_{x\to 0} x \ln\left(1+\frac{x}{e}\right) = \frac{1}{e}$.
La fonction exponentielle étant continue, on obtient par composition :

$$\ln{(e+x)}^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{e}}.$$

16. Pour x différent de 0 :

$$\cos{(x)}^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln{(1+\cos{(x)}-1)}\right).$$

Or $\lim_{x\to 0}\cos(x) - 1 = 0$ et $\ln(1+u) \sim_0 u$. D'où :

$$\ln{(\cos(x))} \sim_0 \cos{(x)} - 1.$$

Mais en 0, $\cos(x) - 1 \sim \frac{-x^2}{2}$. Donc :

$$\frac{1}{x^2}\ln{(\cos(x))} \sim_0 -\frac{1}{2}.$$

Autrement dit, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln{(\cos(x))} = -\frac{1}{2}$. Par composition, on en déduit que l'expression initiale a pour limite $e^{-\frac{1}{2}}$.

Exercice 2. Déterminer un équivalent simple de :

1. $\frac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$ 2. $\frac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}}$ en $+\infty$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$ 3. $\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x^4+3}-x^2}$ en $+\infty$ 4. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})}\ln(\frac{x}{x+1})$ en $+\infty$ 5. $\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$

Correction

Correction abrégé :

1. Pour x assez grand :
$$\frac{x-1}{\sqrt{x+1}} \leq \frac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x+1}} \leq \frac{x+1}{\sqrt{x+1}}.$$
En divisant par $\sqrt{x}$, on constate que les membres gauche et droit des inégalités tendent vers 1. Donc :
$$\frac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x+1}} \sim_{+\infty} \sqrt{x}.$$
2. Pour x assez grand :
$$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta} = \frac{x^{\alpha-\beta}}{1+x^{-\beta}}.$$
$\beta > 0$. Donc $x^{-\beta}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. D'où :
$$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \sim_{+\infty} x^{\alpha-\beta}.$$
3. Pour x assez grand, on obtient en multipliant par l'expression conjuguée du dénominateur :
$$\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x^4+3}-x^2} = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x^4+3}+x^2\right)}{3} = \frac{\sin(\frac{1}{x})x^2\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}+1\right)}{3} \sim_{+\infty} \frac{2x}{3}.$$
4. Réécrivons l'expression différement :
$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})}\ln(\frac{x}{x+1}) = \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\left(-\ln\left(\frac{(x+1)}{x}\right)\right) = \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\left(-\ln\left(\frac{(x+1)}{x}\right)\right).$$
Que l'on peut réécrire :
$$\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\left(-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$
On en déduit que $-x$ est un équivalent en $+\infty$ de l'expression initiale.
5. Transformons l'expression en multipliant par l'expression conjuguée :
$$\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}}.$$
En multiplant par l'expression conjuguée du numérateur, on obtient :
$$\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2} = \frac{}{(\sqrt{x^4+1}+x^2)\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x\sqrt{2}}.$$
En factorisant par des puissances de x :
$$\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2} = \frac{1}{x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+1)x(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}+\sqrt{2})} \sim_{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{2}x^3}.$$