TD 20 limites et continuité

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Prolonger en 0 par continuité les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$; 2. $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ 3. $x \mapsto \frac{\sqrt{1-x^2}-\cos(x)}{x^2}$; 4. $\frac{a^x-b^x}{x}$, avec $a>0, b>0$.

Correction

1. Posons $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$; Lorsque x tend vers 0, $-\frac{1}{x^2}$ tend vers $-\infty$. Or $\lim_{u\to-\infty} e^u = 0$. Donc par composition de limite, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. On prolonge alors f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Ainsi prolongé, on pourra remarquer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Posons $f_2 : x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}$. On calcule la limite en 0 à l'aide d'équivalent usuel :
$$f_2(x) \sim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} \sim_{x\to 0} \frac{1}{2}.$$
f_2 a donc une limite en 0 égale à $\frac{1}{2}$. On prolonge f_2 par continuité en 0 en posant $f_2(0) = \frac{1}{2}$
3. Posons $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sqrt{1-x^2}-\cos(x)}{x^2}$.Pour tour $x \neq 0$, réécrivons $f_3(x)$ de manière différente :
$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{(\sqrt{1-x^2}-1)-(\cos(x)-1)}{x^2} \\ &= (\cos(x)-1)\frac{\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)}{\cos(x)-1}-1}{x^2} \end{aligned}$$
.

À l'aide d'un équivalent usuel, on en deduit que
$$f_3(x) \sim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2}\frac{\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)}{\cos(x)-1}-1}{x^2} \sim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)}{\cos(x)-1}-1\right).$$
Or, à l'aide des équivalents usuels :
$$\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)}{\cos(x)-1} \sim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{-\frac{x^2}{2}} \sim_{x\to 0} 1.$$
Il en résulte que $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1-x^2}-1)}{\cos(x)-1} = 1$. D'où :
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1-x^2}-1)}{\cos(x)-1} - 1 = 0.$$
Mais
$$f_3(x) \sim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)}{\cos(x)-1}-1\right).$$
Donc $\lim_{x\to 0} f_3(x) = 0$. Donc on prolonge f_3 par continuité en 0 en posant $f_3(0) = 0$.

Remarque 1. Comme on ne peut pas ajouter les équivalents, on se ramène à des calculs de limites en factorisant.

4. Soient $a > 0, b > 0$. Posons $f_4 : x \mapsto \frac{a^x - b^x}{x}$. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \frac{e^{x\ln(a)} - e^{x\ln(b)}}{x} \\ &= e^{x\ln(b)} \frac{e^{x(\ln(a)-\ln(b)} - 1}{x} \\ &= e^{x\ln(b)} \frac{e^{x(\ln(\frac{a}{b})} - 1}{x} \end{aligned}$$

.

Or $\lim_{x\to 0} e^{x\ln(b)} = 1$, $\lim_{x\to 0} e^{x\ln(\frac{a}{b})} = 1$. Donc, à l'aide d'équivalent :

$$f_4(x) \sim_{x\to 0} 1 \cdot \frac{x\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{x} \sim_{x\to 0} \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Donc on prolonge par continuité en 0 en posant $f_4(0) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

Exercice 2. 1. Soit P la fonction polynomiale définie par : $P(x) = x^{18} + x^{13} - 3x^2 + 1$. Montrer que P admet un minimum global.

2. De manière générale, montrer que tout polynôme de degré pair de coefficient dominant strictement positif admet un minimum global.

Correction

1. On présente une preuve non calculatoire. P étant une fonction polynomiale, on en déduit qu'elle est équivalentes aux infinis à son terme dominant x^{18}. La fonction P a donc comme limite $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$. Il en résulte qu'il existe $A < 0$ et $B > 0$ vérifiant :

$$\forall x < A, P(x) > P(0) \text{ et } \forall x > B, P(x) > P(0).$$

De plus, P est continue sur le segment $[A, B]$. D'après le théorème des bornes, il existe $(c, d) \in [A, B]^2$ vérifiant :

$$\forall x \in [A, B], P(c) \leq P(x) \leq P(d).$$

Montrons que $P(c)$ est le minimum global de P.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

— Cas 1 : $x \in [A, B]$. Par construction $P(c) \leq P(x)$.

— Cas 2 : $x < A$ ou $x > B$. Par construction de A et B, $P(x) \geq P(0)$. Or $0 \in [A, B]$. Donc $P(0) \geq P(c)$. D'où $P(x) \geq P(c)$.

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq P(c)$. Autrement dit, $P(c)$ est le minimum de la fonction.

2. On remarque que la démonstration dans la question 1 marche pour n'importe quel polynôme de degré pair non nul avec un coefficient dominant strictement positif. Dans le cas où le degré de P est nul, la fonction est alors constante et admet donc un minimum global.

Exercice 3. On considère l'équation en fonction d'un paramètre réel $t > 0$ suivante :

$$x^5 + tx + 1 = 0. \tag{1}$$

1. Soit $t > 0$. Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation (1).
2. Soit $t > 0$. On définit $f(t)$ comme étant le réel tel que :

$$f(t)^5 + tf(t) + 1 = 0.$$

3. Montrer que f est strictement monotone.
4. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
5. Déterminer les limites aux bornes de f.

Correction

1. Soit $t > 0$. Posons $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_t(x) = x^5 + tx + 1.$$

La fonction g_t étant polynômiale, elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_t'(x) = 5x^4 + t > 0.$$

La dérivée étant strictement positive sur $\mathbb{R}$ on en déduit que g_t est <u>strictement croissante sur $\mathbb{R}$</u>. De plus, $g_t(x) \sim_{-\infty} x^5$ et $g_t(x) \sim_{+\infty} x^5$. Donc <u>$\lim_{x\to-\infty} g_t(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g_t(x) = +\infty$</u>.
On rappelle que <u>g_t est également continue sur $\mathbb{R}$</u>.
On en déduit, en appliquant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires un unique réel x_0 vérifiant $g_t(x_0) = 0$.
L'équation (1) a donc une unique solution réelle. On peut même remarquer que la solution est dans l'intervalle $]-1, 0[$. En effet, on constate que $g_t(-1) = -t < 0$ et $g_t(0) = 1$.

2. Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{+\star 2}$. On suppose que $t_1 < t_2$. D'après la question 1, g_{t_1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$f(t_1) < f(t_2) \iff g_{t_1}(f(t_1)) < g_{t_1}(f(t_2)).$$

Raisonnons par équivalence. On a :

$$g_{t_1}(f(t_1)) < g_{t_1}(f(t_2)) \iff 0 < f(t_2)^5 + t_1 f(t_2) + 1$$
.

Or $f(t_2)^5 = -1 - t_2 f(t_2)$. Donc

$$\begin{aligned} 0 < f(t_2)^5 + t_2 f(t_2) + 1 &\iff 0 < -1 - t_2 f(t_2) + t_1 f(t_2) + 1 \\ &\iff 0 < f(t_2)(t_1 - t_2) \end{aligned}$$
.

Or $f(t_2)$ étant la solution de l'équation $x^5 + t_2 x + 1 = 0$, d'après la question 1, on sait que $f(t_2) < 0$. Donc le produit $f(t_2)(t_1 - t_2)$ est bien strictement positif. Par équivalence, on en déduit que $f(t_1) < f(t_2)$. Il en résulte que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

3. Montrons que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^{+\star}$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}^{+\star}$.
Montrer que f est continue en t_0 revient à montrer que f admet une limite en t_0 égale à $f(t_0)$. Pour cela, on va montrer que la limite à droite (et à gauche) de f en t_0 est égale à $f(t_0)$.
La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ elle est en particulier croissante sur $[t_0, +\infty[$ (sur $]0, t_0[$) Mais $f(t_0)$ est un nombre réel. Donc la fonction f est minorée (majorée) sur $[t_0, +\infty[$ (sur $]0, t_0[$)
D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que f admet une limite à droite en t_0 (à gauche en t_0) que l'on note ℓ^+ (ℓ^-). Montrons que $\ell^+ = \ell^- = f(t_0)$.
Pour tout $t > t_0$ ($t < t_0$), on a :

$$f(t)^5 + tf(t) + 1 = 0.$$

lorsque t tend vers t_0^+ (t_0^-), par opération sur les limites, on obtient :

$$(\ell^+)^5 + t_0\ell^+ + 1 = 0 \ \left((\ell^-)^5 + t_0\ell^- + 1 = 0\right).$$

Mais par unicité de la solution de cette équation, on en déduit que $\ell^+ = \ell^- = f(t_0)$. Ainsi, f est continue en t_0.
Le raisonnement étant valable pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

4. — Déterminons d'abord la limite de f en 0 :
on peut effectuer le même raisonnement que dans la question 3. Notons l_0 la limite en 0. En passant à la limite dans l'égalité, on obtient :

$$l_0^5 + 1 = 0.$$

Or l'équation $x^5 + 1 = 0$ admet une unique solution réelle : -1. Donc $l = -1$.

— Déterminons la limite de f en $+\infty$: par construction de f, on constate que l'on $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-1, 0]$ et par stricte croissance de f, on en déduit qu' elle admet une limite finie en $+\infty$ que l'on note l_∞. Montrons que $l_\infty = 0$. Par l'absurde : on suppose $l_\infty \neq 0$ Dans l'égalité $f(t)^5 + tf(t) + 1 = 0$, le membre gauche admet une limite infini tandis que le membre droit est nul. Ce qui est absurde. Donc la limite de f en ∞est égale à 0