TD 21 Espaces vectoriels

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Parmi ces ensembles, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ? Justifier votre réponse.

1. $A = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$,
2. $B = \{(x, \frac{1}{x}), x \in \mathbb{R}^\star\}$,
3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 | x + y - z = 1\}$
4. $D = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 | (x - y + 3z, y + t, y - z + t, x + 2y - 3z - 2t) = (0, 0, 0, 0))\}$

Exercice 2. On pose $B = ((1, -1, 1), (0, 2, 1), (0, -1, 1))$.

1. Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice représentative de X dans la base B.

Exercice 3. Le **rang** d'une famille $\mathcal{F}$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$. Déterminer le rang des familles suivantes et dire si elles sont libres :

1. $((1, 2, 1), (2, 3, 1), (1, 1, 3))$ 2. $((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$

Exercice 4. Déterminer une base du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - y + z - t = 0, x + y + z + t = 0, 3x - y + 3 - t = 0\}$.

Exercice 5. On pose $\mathcal{F} = ((1, 3, 2, 0), (4, 1, 0, -1))$ Déterminer un ensemble d'équations S de sorte que l'on ait :

$$vect(\mathcal{F}) = \{x \in \mathbb{R}^4 | x \text{ vérifie } S\}.$$

Exercice 6. On pose : $a = (0, 0, 1, 0)$, $b = (1, 1, 0, -1)$, $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, $w = (1, 1, 1, 1)$.

1. Déterminer les dimensions de $F = vect(a, b)$, $G = vect(u, v, w)$, $H = vect(a, b, u, v, w)$ et $E = F \cap G$.

Exercice 7. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que la famille $\mathcal{F} = ((\lambda, \lambda, 1), (1, \lambda, 1), (2, 1, 1))$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Sous quelle condition a-t-on une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8.

1. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \cdots, u_n)$ une famille liée. Montrer qu'il existe un $x \in \mathcal{F}$ tel que $vect(\mathcal{F} \backslash \{x\}) = vect(\mathcal{F})$
2. Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice. Montrer qu'une famille $\mathcal{G}$ qui contient $\mathcal{F}$ est génératrice.
3. Soit $\mathcal{F}$ une famille libre. Montrer qu'une famille $\mathcal{G}$ incluse dans $\mathcal{F}$ est libre.
4. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On pose : $v_1 = \lambda u_1$ avec $\lambda \neq 0$. Montrer que $vect(\mathcal{F}) = vect((v_1, u_2, \cdots, u_n))$.
5. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On pose : $v_1 = u_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i u_i$. Montrer que $vect(\mathcal{F}) = vect((v_1, u_2, \cdots, u_n))$.