TD 2 mathématiques

BCPST 1 2019-2020

Ensembles et récurrences

Exercice 1. Soient E un ensemble, A et B des parties de E. On appelle différence symétrique de A et de B la partie :

$$A\Delta B = \{x \in E | (x \in A, x \notin B) \text{ ou } (x \in B, x \notin A)\}.$$

1. Décrire la différence symétrique de $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ et de $B = \{2, 5, 6, 7, 10\}$.
2. Soient A, B, C trois ensembles.
   (a) Montrer que $(A\Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$.
   (b) Montrer que $(A\Delta B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.
   (c) Montrer que $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$.
   (d) Montrer que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Exercice 2. Soient A, B, C trois ensembles. On suppose que $A \cup B$ est inclus dans $A \cup C$ et $A \cap B$ est inclus dans $A \cap C$. Comparer B et C.

Exercice 3. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Que dire des égalités suivantes :
— $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
— $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Exercice 4. On considère la suite définie par récurrence de la manière suivante :

$$u_0 = 1, u_1 = -2, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5.
2. Conjecturer une formule pour u_n, où $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 5. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\begin{cases} & u_1 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} & = & u_n + 8n \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \geq 1, u_n = (2n-1)^2$.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on pose

$$P(n) : u_n = (2n-1)^2.$$

Montrons que P est vraie par récurrence.
— Initialisation : par définition, $u_1 = 1$ et $(2 \cdot 1 - 1)^2 = 1^2 = 1$. Donc $u_1 = (2 \cdot 1 - 1)^2$. $P(1)$ est donc vraie.
— Hérédité : soit n un entier supérieur à 1. On suppose que $P(n)$ est vraie. Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie. Par définition de u_{n+1} :

$$u_{n+1} = u_n + 8n.$$

D'après $P(n)$, $u_n = (2n-1)^2$. D'où :

$$u_{n+1} = (2n-1)^2 + 8n.$$

En développant, on obtient : $u_{n+1} = 4n^2 - 4n + 1 + 8n$. D'où :

$$u_{n+1} = 4n^2 + 4n + 1.$$

En factorisant, on retrouve : $u_{n+1} = (2n+1)^2 = (2(n+1)-1)^2$. $P(n+1)$ est donc vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier n supérieur à 1, on a

$$\boxed{u_n = (2n-1)^2}$$

.

Exercice 6. Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre S_n défini par

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

est un entier. On pourra raisonner par récurrence.

Exercice 7. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose

$$P(n) : \forall (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in [1, +\infty[^n, 2^{n-1}(a_1 a_2 \dots a_n + 1) \geq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n).$$

On veut montrer que P est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

1. Montrer que $P(2)$ est vraie.
2. Montrer que P est une propriété héréditaire.
3. Conclure.

Correction

1. Soient a_1, a_2 des réels supérieurs à 1. Montrons que

$$2(a_1 a_2 + 1) \geq (1 + a_1)(1 + a_2).$$

Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} 2(a_1 a_2 + 1) \geq (1 + a_1)(1 + a_2) &\iff 2(a_1 a_2 + 1) \geq 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 \\ &\iff 2a_1 a_2 + 2 \geq 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 \\ &\iff a_1 a_2 - a_1 - a_2 + 1 \geq 0 \\ &\iff (a_1 - 1)(a_2 - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Or par hypothèses, a_1 et a_2 sont plus grands que 1. Donc $(a_1 - 1)(a_2 - 1)$ est bien positif. Par équivalence, on en déduit que $\underline{2(a_1 a_2 + 1) \geq (1 + a_1)(1 + a_2)}$. Donc $P(2)$ est bien vraie.

2. Soit n un entier supérieur à 2. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est également vraie. Soient $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \in [1, +\infty[^{n+1}$. D'après $P(n)$,

$$2^{n-1}(a_1 a_2 \dots a_n + 1) \geq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n).$$

a_{n+1} étant positif, $(1 + a_{n+1})$ est donc strictement positif et

$$2^{n-1}(a_1 a_2 \dots a_n + 1)(1 + a_{n+1}) \geq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)(1 + a_{n+1}).$$

Mais pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_i \geq 1$. Donc $a_1 a_2 \dots a_n \geq 1$. Or a_{n+1} est supérieur à 1. Donc d'après $P(2)$, on a

$$2(a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} + 1) \geq (a_1 a_2 \dots a_n + 1)(1 + a_{n+1}).$$

D'où

$$2^n(a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} + 1) \geq 2^{n-1}(a_1 a_2 \dots a_n + 1)(1 + a_{n+1}).$$

Par transitivité des inégalités, il en résulte que

$$\boxed{2^n(a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} + 1) \geq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)(1 + a_{n+1})}.$$

$P(n+1)$ est donc vraie.

3. D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier $n \geq 2$, $P(n)$ est vraie.