

TD 3 mathématiques

BCPST 1 2019-2020

Réels, équations, inéquations

Exercice 1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\sqrt{2-x} = |x+1|$; 2. $|x-1| + |x+1| = 2$; 3. $x^6 - 4x^3 + 1 = 0$.

On commencera par décrire l'ensemble de définition des équations.

Exercice 2. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $(2x-3)(3-x) < (3-x)(x+3)$; 2. $|x^2 - 6x + 4| \leq 1$; 3. $\frac{2x+3}{x+5} \leq 2x-1$;
4. $|3x-5| \geq |2x+3|$; 5. $\sqrt{|2x+1|} \leq |x-1|$.

On commencera par décrire l'ensemble de définition de ces inéquations.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n+2}{6} \rfloor + \lfloor \frac{n+4}{6} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n+3}{6} \rfloor$$

Exercice 4. On veut étudier l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ en fonction du paramètre réel a :

$$x - a = \sqrt{x(2x-1)}.$$

1. Décrire l'ensemble de définition de cette équation.
2. On suppose que $a > \frac{1}{2}$. Résoudre l'équation.
3. On suppose que $a \in [0, \frac{1}{2}]$. Résoudre l'équation.
4. On suppose que $a < 0$. Résoudre l'équation.
5. Résumer les différentes possibilités.

Exercice 5. Montrer que toute partie A de \mathbb{R} admet une borne inférieure égale à sa borne supérieure si et seulement si A est un singleton (ensemble réduit à exactement un élément).