TD 3 mathématiques

BCPST 1 2019-2020

Réels, équations, inéquations

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sqrt{2-x} = |x+1|$;   2. $|x-1| + |x+1| = 2$;   3. $x^6 - 4x^3 + 1 = 0$.

On commencera par décrire l'ensemble de définition des équations.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(2x-3)(3-x) < (3-x)(x+3)$;   2. $|x^2 - 6x + 4| \leq 1$;   3. $\frac{2x+3}{x+5} \leq 2x - 1$;
4. $|3x-5| \geq |2x+3|$;   5. $\sqrt{|2x+1|} \leq |x-1|$.

On commencera par décrire l'ensemble de définition de ces inéquations.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n+2}{6} \rfloor + \lfloor \frac{n+4}{6} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n+3}{6} \rfloor$$

Exercice 4. On veut étudier l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ en fonction du paramètre réel a :

$$x - a = \sqrt{x(2x-1)}.$$

1. Décrire l'ensemble de définition de cette équation.
2. On suppose que $a > \frac{1}{2}$. Résoudre l'équation.
3. On suppose que $a \in [0, \frac{1}{2}]$. Résoudre l'équation.
4. On suppose que $a < 0$. Résoudre l'équation.
5. Résumer les différentes possibilités.

Correction

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E_a : x - a = \sqrt{x(2x-1)}$. Constatons que pour tout $a \in \mathbb{R}$, E_a est définie si et seulement si $x \in]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Comme la racine carrée est définie pour les nombres positifs, on en déduit que l'ensemble des solutions de cette équation est inclus dans l'ensemble $A = (]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[) \cap [a, +\infty[$. Il nous suffit donc d'étudier cette sur A, Désormais, on fixe $x \in A$. l'équation E_a est alors équivalente à la suivante :

$$x^2 - 2ax + a^2 = 2x^2 - x,$$

qui est équivalente à :

$$x^2 + (2a-1)x - a^2 = 0.$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = (2a-1)^2 + 4a^2 = 8a^2 - 4a + 1$. Les solutions de cette équation sont exactement :

$$x_1 = \frac{1 - 2a + \sqrt{\Delta}}{2},\ x_2 = \frac{1 - 2a - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Déterminons les cas dans lesquels x_1 ou x_2 sont solutions en fonction de a. Pour être solution, il faut et il suffit de vérifier si x_1 ou x_2 sont des éléments de A.

1. cas 1 : $a > \frac{1}{2}$. Dans ce cas, $A = [a, +\infty[$. On constate que $x_2 < \frac{1-2a}{2} < 0$. Donc x_2 n'est pas un élément de A et ne peut donc pas être solution de l'équation initiale. On pose :$R = \sqrt{\Delta}$. On a :

$$\begin{array}{rcll} x_1 \geq a & \Leftrightarrow & 1 - 2a + R \geq 2a & \\ & \Leftrightarrow & R \geq 4a - 1 \geq 0 & \\ & \Leftrightarrow & 8a^2 - 4a + 1 \geq (4a-1)^2 & \text{(stricte croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}^+\text{)} \\ & \Leftrightarrow & 8a^2 - 4a + 1 \geq 16a^2 - 8a + 1 & \\ & \Leftrightarrow & 0 \geq 8a^2 - 4a & \\ & \Leftrightarrow & 0 \geq 4a(2a-1) & \\ & \Leftrightarrow & a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] & \end{array}$$

cette dernière proposition étant fausse. On en conclut que x_1 n'est pas un élément de A. On en déduit que pour $a > \frac{1}{2}$, l'équation initiale n'a pas de solution réelle.

2. cas 2 : $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Dans ce cas, $A = [\frac{1}{2}, +\infty[$. On a :

$$\begin{array}{rcll} x_1 \in A & \Leftrightarrow & x_1 \geq \frac{1}{2} & \\ & \Leftrightarrow & 1 - 2a + R \geq 1 & \\ & \Leftrightarrow & R \geq 2a \geq 0 & \\ & \Leftrightarrow & 8a^2 - 4a + 1 \geq 4a^2 \geq 0 & \text{(stricte croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}^+\text{)} \\ & \Leftrightarrow & 4a^2 - 4a + 1 \geq 0 & \\ & \Leftrightarrow & (2a-1)^2 \geq 0 & \end{array}$$

cette dernière proposition étant vraie. On en déduit que x_1 est bien un élément de A. Concernant x_2, on a :

$$\begin{array}{rcl} x_2 \in A & \Leftrightarrow & 1 - 2a - R \geq 1 \\ & \Leftrightarrow & -2a - R \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & -R \geq 2a \end{array}$$

Or, $2a > 0$ et $-R \leq 0$. La dernière inéquation est donc fausse. Ainsi, $x_2 \notin A$.

3. cas 3 : $a \leq 0$. Dans ce cas, $A = [a, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$. On a :

$$\begin{array}{rcl} x_1 \in [\frac{1}{2}, +\infty[& \Leftrightarrow & 1 - 2a + R \geq 1 \\ & \Leftrightarrow & -2a + R \geq 0 \end{array}$$

cette dernière inéquation étant vraie, par positivité de $-2a$ et R. On en déduit que $x_1 \in [\frac{1}{2}, +\infty[\subset A$. Donc x_1 est bien une solution de l'équation initiale. Comme le produit $x_1 x_2 = -a^2$, on en déduit que $x_2 \leq 0$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcll} x_2 \in A & \Leftrightarrow & x_2 \geq a & \\ & \Leftrightarrow & 1 - 2a - R \geq a & \\ & \Leftrightarrow & 1 - 3a \geq R \geq 0 & \\ & \Leftrightarrow & (1-3a)^2 \geq 8a^2 - 4a + 1 & \text{(stricte croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}^+\text{)} \\ & \Leftrightarrow & 9a^2 - 6a + 1 \geq 8a^2 - 4a + 1 & \\ & \Leftrightarrow & a^2 - 2a \geq 0 & \\ & \Leftrightarrow & a(a - \frac{1}{2}) \geq 0 & \end{array}$$

cette dernière proposition étant vraie, car $a \leq 0$. On en déduit que $x_2 \in A$.

Récapitulons. Il y a trois cas :
- $a > \frac{1}{2}$, dans ce cas l'équation n'a pas de solution ;
- $0 < a \leq \frac{1}{2}$, dans ce cas a comme unique solution x_1 ;
- $a \leq 0$, dans ce cas, les solutions sont x_1 et x_2.

Exercice 5. Montrer que toute partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure égale à sa borne supérieure si et seulement si A est un singleton (ensemble réduit à exactement un élément).

Correction

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On raisonne par double implication.

- Supposons que A admet une borne inférieure égale à sa borne supérieure.
  Notons respectivement m_0 et M_0 la borne inférieure et la borne supérieure de A. Par hypothèse, $m_0 = M_0$. De plus, A est différent du vide : sinon, m_0 et M_0 ne seraient pas des réels. Il existe donc un élément de $a \in A$.
  On a donc : $m_0 \leq a \leq M_0$. Or $m_0 = M_0$. Par encadrement, on en déduit que $a = m_0$. Montrons que $A = a$. On vient de montrer une inclusion. Réciproquement, soit $x \in A$. On a alors $m_0 \leq x \leq M_0$. Par encadrement, on obtient $x = m_0 = M_0$. Or $a = m_0$. D'où $x = a$. On a bien l'autre inclusion.
  L'ensemble A est bien un singleton.
- Supposons que A est réduit à un singleton. Il existe donc $a \in A$ tel que $A = \{a\}$. A admet donc comme borne inférieure et comme borne supérieure la valeur a. Donc la borne supérieure et la borne inférieure de A sont égales.

Conclusion : d'après le principe de double inclusion, il y a bien équivalence.