TD 3 mathématiques

BCPST 1 2017-2018

Réels, équations, inéquations

Exercice 1. Étudier l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ en fonction du paramètre réel a :

$$x - a = \sqrt{x(2x-1)}.$$

Correction

Comme la racine carrée est définie pour les nombres positifs, on en déduit que l'ensemble des solutions de cette équation est inclus dans l'ensemble $A = (]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[) \cap [a, +\infty[$. Sur A, l'équation est donc équivalente à la suivante :

$$x^2 - 2ax + a^2 = 2x^2 - x,$$

qui est équivalent à :

$$x^2 + (2a-1)x - a^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = (2a-1)^2 + 4a^2 = 8a^2 - 4a + 1$. Les solutions de cette équation sont donc :

$$x_1 = \frac{1 - 2a + \sqrt{\Delta}}{2},\ x_2 = \frac{1 - 2a - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Déterminons les cas dans lesquels x_1 ou x_2 sont solutions en fonction de a. Pour être solution, il faut et il suffit de vérifier si x_1 ou x_2 sont des éléments de A.

1. cas 1 : $a > \frac{1}{2}$. Dans ce cas, $A = [a, +\infty[$. On constate que $x_2 < \frac{1-2a}{2} < 0$. Donc x_2 n'est pas un élément de A et ne peut donc pas être solution de l'équation initiale. On pose :$R = \sqrt{\Delta}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} x_1 \geq a & \Leftrightarrow & 1 - 2a + R \geq 2a \\ & \Leftrightarrow & R \geq 4a - 1 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & 8a^2 - 4a + 1 \geq (4a-1)^2 \\ & \Leftrightarrow & 8a^2 - 4a + 1 \geq 16a^2 - 8a + 1 \\ & \Leftrightarrow & 0 \geq 8a^2 - 4a \\ & \Leftrightarrow & 0 \geq 4a(2a-1) \\ & \Leftrightarrow & a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \end{array}$$

   cette dernière proposition étant fausse. On en conclut que x_1 n'est pas un élément de A. On en déduit que pour $a > \frac{1}{2}$, l'équation initiale n'a pas de solution réelle.

2. cas 2 : $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Dans ce cas, $A = [\frac{1}{2}, +\infty[$. On a :

$$\begin{array}{rcl} x_1 \in A & \Leftrightarrow & x_1 \geq \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow & 1 - 2a + R \geq 1 \\ & \Leftrightarrow & R \geq 2a \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & 8a^2 - 4a + 1 \geq 4a^2 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & 4a^2 - 4a + 1 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & (2a-1)^2 \geq 0 \end{array}$$

   cette dernière proposition étant vraie. On en déduit que x_1 est bien un élément de A. Concernant x_2, on a :

$$\begin{array}{rcl} x_2 \in A & \Leftrightarrow & 1 - 2a - R \geq 1 \\ & \Leftrightarrow & -2a - R \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & -R \geq 2a \end{array}$$

   Or, $2a > 0$ et $-R \leq 0$. La dernière inéquation est donc fausse. Ainsi, $x_2 \notin A$.

3. cas 3 : $a \leq 0$. Dans ce cas, $A = [a, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} x_1 \in [\tfrac{1}{2}, +\infty[&\Leftrightarrow 1 - 2a + R \geq 1 \\ &\Leftrightarrow -2a + R \geq 0 \end{aligned}$$

cette dernière inéquation étant vraie, par positivité de $-2a$ et R. On en déduit que $x_1 \in [\frac{1}{2}, +\infty[\subset A$. Donc x_1 est bien une solution de l'équation initiale. Comme le produit $x_1 x_2 = -a^2$, on en déduit que $x_2 \leq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x_2 \in A &\Leftrightarrow x_2 \geq a \\ &\Leftrightarrow 1 - 2a - R \geq a \\ &\Leftrightarrow 1 - 3a \geq R \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - 3a)^2 \geq 8a^2 - 4a + 1 \\ &\Leftrightarrow 9a^2 - 6a + 1 \geq 8a^2 - 4a + 1 \\ &\Leftrightarrow a^2 - 2a \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a(a - \tfrac{1}{2}) \geq 0 \end{aligned}$$

cette dernière proposition étant vraie, car $a \leq 0$. On en déduit que $x_2 \in A$.

Récapitulons. Il y a trois cas :

— $a > \frac{1}{2}$, dans ce cas l'équation n'a pas de solution ;

— $0 < a \leq \frac{1}{2}$, dans ce cas a comme unique solution x_1 ;

— $a \leq 0$, dans ce cas, les solutions sont x_1 et x_2.