

TD 4 mathématiques

BCPST 1 2019-2020

Nombres complexes

Points abordés

— Nombres complexes.

Exercice 1. Déterminer les formes algébriques et exponentielles de

1. $(1+i)^{20}$. 2. $e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}$ 3. $e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{4}}$. 4. $e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{4}}$ 5. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{125}$,

Exercice 2. Résoudre les équations d'inconnue complexe z suivantes :

1. $|z| = |z - 1 + 5i|$ 2. $|\bar{z} - i| = 1$ 3. $z(2\bar{z} + i) = 1$

Exercice 3. On veut résoudre l'équation d'inconnue complexe z suivante :

$$z^2 - (2+i)z + (i-1) = 0 \tag{E}$$

Dans la suite, a et b désignent respectivement la partie réelle et imaginaire de z .

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente au système
$$\begin{cases} a^2 - b^2 - 2a + b - 1 = 0 \\ 2ab - a - 2b + 1 = 0 \end{cases}.$$
2. Factoriser $2ab - a - 2b + 1$. En déduire les solutions de (E).

Exercice 4. Soient u et v deux complexes. Montrer que :

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

Correction

Soient $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$\begin{aligned} |u+v|^2 + |u-v|^2 &= (u+v)\overline{(u+v)} + (u-v)\overline{(u-v)} \\ &= (u+v)(\bar{u} + \bar{v}) + (u-v)(\bar{u} - \bar{v}) \\ &= |u|^2 + u\bar{v} + v\bar{u} + |v|^2 + |u|^2 - u\bar{v} - v\bar{u} + |v|^2 \\ &= 2|u|^2 + 2|v|^2 \\ &= 2(|u|^2 + |v|^2) \end{aligned}$$

Exercice 5. On note $E = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$, et $F = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Montrer que :

$$z \in E \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} \in F.$$

Correction

Soit $z \in \mathbb{C}$. Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+i} \in F &\Leftrightarrow \left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 1 \\ &\Leftrightarrow |z-i| < |z+i| \\ &\Leftrightarrow |z-i|^2 < |z+i|^2 && \text{modules positifs} \\ &\Leftrightarrow \Re(z)^2 + (\Im(z) - 1)^2 < \Re(z)^2 + (\Im(z) + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow 0 < (\Im(z) + 1)^2 - (\Im(z) - 1)^2 \\ &\Leftrightarrow 0 < 4\Im(z) \\ &\Leftrightarrow 0 < \Im(z) \\ &\Leftrightarrow z \in E \end{aligned}$$