TD 6 Sommes, produits

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. On fixe $n \in \mathbb{N}$ Simplifier :

1. $R_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} 2^k 7^{k-n}$; 2. $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}$; 3. $T_n = \sum_{k=0}^{n^2}(2k-1)$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on veut calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} 2k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer T_n, U_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Faire le lien entre S_n, T_p, U_q où p et q sont des entiers à déterminer.
3. En déduire S_n.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. En vous inspirant des calculs précedents, simplifier $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $W_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$ et $S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$.

1. Simplifier S_n. 2. Montrer que $S_n = 2W_n - \sum_{k=1}^{n} k^2$. 3. En déduire W_n.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire $(\sqrt{2}+1)^n$ sous la forme $a\sqrt{2}+b$ où a et b sont entiers.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier :

1. $U_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j|$; 2. $V_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{1+j}$.

Exercice 6.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} 2^k$.
2. En sommant d'abord par rapport à k puis par rapport à j, en déduire une formule de la somme.
3. Soit $x \neq 1$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

Exercice 7.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{p-1+i}{i} = \binom{n+p}{p}.$$
2. Calculer $\sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=1}^{p-1}(i+j) \right)$.

Exercice 8. Calculer

1. $\prod_{k=1}^{n}(4k^2-1)$; 2. On fixe $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\prod_{1 \leq i,j \leq n} x^{i+j}$.