TD 6 Sommes, produits

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. On fixe $n \in \mathbb{N}$ Simplifier :

1. $R_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} 2^k 7^{k-n}$; 2. $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}$; 3. $T_n = \sum_{k=0}^{n^2} (2k-1)$.

Remarque 1. Indications exo 1 :

1. $7^{-a} = (\frac{1}{7})^a$ et symétrie des coeff binomiaux. 2. Reindexer si besoin.
3. linéarité de la somme + formule.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on veut calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} 2k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer T_n, U_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Faire le lien entre S_n, T_p, U_q où p et q sont des entiers à déterminer.
3. En déduire S_n.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. En vous inspirant des calcul précedents, simplifier $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2$.

Remarque 2. Indication exo 2 :

1. linéarité de la somme.
2. Regrouper les termes qui ont le même signe ensemble (une partie paire, une partie impaire)+ changements variables adaptés dans chacune des somme.
3. Utiliser la relation précédente.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $W_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$ et $S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$.

1. Simplifier S_n. 2. Montrer que $S_n = 2W_n - \sum_{k=1}^{n} k^2$. 3. En déduire W_n.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire $(\sqrt{2}+1)^n$ sous la forme $a\sqrt{2}+b$ où a et b sont entiers.

Remarque 3. Indication exo 4 :
formule du binôme + séparer partie paire et impaire.