Solutions

1. Calcul de V_n (Exo 5) :

$$\begin{aligned}
V_n &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\tfrac{i}{1+j} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\tfrac{1}{1+j}\sum_{i=1}^{j} i \\
&= \sum_{j=1}^{n}\tfrac{1}{1+j}\left(\tfrac{j(j+1)}{2}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\tfrac{j}{2} \\
&= \tfrac{n(n+1)}{4}
\end{aligned}$$

2. Calcul exo 6 :

   (a)

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le j\le k\le n} 2^k &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^k \sum_{j=1}^{k} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^k k
\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le j\le k\le n} 2^k &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k \\
&= \sum_{j=1}^{n}\tfrac{(2^j-2^{n+1}}{1-(2)} \\
&= -\sum_{j=1}^{n}(2^j-2^{n+1}) \\
&= -(2^{n+1}-2-n2^{n+1}) \\
&= (n-1)2^{n+1}+2 \\
&=
\end{aligned}$$

(c) avec x :

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^n kx^k &= \textstyle\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k x^k \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n x^k \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^n \frac{(x^j - x^{n+1})}{1-x} \\
&= \tfrac{1}{1-x}\left(\left(\tfrac{x-x^{n+1}}{1-x}\right) - nx^{n+1}\right) \\
&= \tfrac{1}{(1-x)^2}\left(\left(x - x^{n+1}\right) - (1-x)nx^{n+1}\right) \\
&= \tfrac{1}{(1-x)^2}\left(nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x\right) \\
&= \tfrac{x}{(1-x)^2}\left(nx^{n+1} - (n+1)x^{n} + 1\right) \\
&= \tfrac{x}{(1-x)^2}\left((nx - (n+1))x^{n} + 1\right) \\
&= \tfrac{x}{(1-x)^2}\left((n(x-1) - 1)x^{n} + 1\right)
\end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P(n) : \forall p \geq 1, \sum_{i=0}^{n} \binom{p-1+i}{i} = \binom{n+p}{p}.$$

— $n = 0$: Soit $p \geq 1$. On a $\binom{p-1}{0} = 1 = \binom{p}{p}$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. Soit $p \geq 1$.

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{p-1+i}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{p-1+i}{i} + \binom{p+n}{n+1}$$

D'après $P(n)$, on en déduit que

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{p-1+i}{i} = \binom{p+n}{p} + \binom{p+n}{n+1}$$

D'où, par symétrie :

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{p-1+i}{i} = \binom{p+n}{p} + \binom{p+n}{p-1}$$

Donc d'après la formule d triangle de Pascal, on obtient

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{p-1+i}{i} = \binom{n+p+1}{p}$$

$P(n+1)$ est donc vraie.

— Conclusion : on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

4. Exo 7 : Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $p \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \prod_{j=1}^{p-1} (i+j) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(p-1+i)!}{i!} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (p-1)! \frac{(p-1+i)!}{i!(p-1)!} \\
&= (p-1)! \sum_{i=0}^{n} \binom{p-1+i}{i} \\
&= (p-1)! \binom{n+p}{p}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} (4k^2-1) &= \prod_{k=1}^{n} (2k-1)(2k+1) \\
&= \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \prod_{k=1}^{n} (2k+1) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} (2k-1)\right)^2 (2n+1) \\
&= \left(\frac{2n!}{\prod_{k=1}^{n} 2k}\right)^2 (2n+1) \\
&= \left(\frac{2n!}{2^n n!}\right)^2 (2n+1) \\
&= \frac{2n!}{n!n!} \frac{(2n+1)!}{4^n} \\
&= \binom{2n}{n} \frac{(2n+1)!}{4^n}
\end{aligned}$$

6. Calcul Exo 8 :

$$\prod_{1 \leq i,j \leq n} x^{i+j} = x^{\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i+j)}$$

Puis calculer les sommes.