TD 7 Applications

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Parmi ces fonctions lesquelles sont surjectives, injectives, bijectives ? Le justifier. $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & |x| \end{array}$ $\quad \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2-x-1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \end{array}$

Exercice 2. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On suppose que f et g sont injectives. Montrer que $g \circ f$ est injective.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+\star}$ une application vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y).$$

1. Montrer que $f(0) = 1$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}, (f(x) = 1) \implies (x = 0)$.

Exercice 4. Décrire l'image et l'image réciproque de $[0, +\infty[$ par l'application f définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |2x-3| - |x+3|, \end{array}$$

on exprimera les résultats à l'aide d'intervalles.

Exercice 5. Déterminer l'application réciproque des fonctions définies par

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.   2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f_2(x,y) = (5x+2y, 4x-y)$

Exercice 6.
1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Construire une bijection de $[|0, n-1|]$ vers $[|1, n+1|]$.
2. Intuitivement, peut-construire une bijection entre $\{a, b, c\}$ et $\{1, 2, 3, 4\}$?
3. Construire toutes les bijections entre $\{1, 2, 3\}$ et $\{a, b, c\}$.
4. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (p,q) & \mapsto & 2^p(2q+1) - 1 \end{array}$$

   (a) Montrer que ϕ est injective.
   (b) Montrer que ϕ est surjective.
   (c) En déduire qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
   (d) Déterminer la réciproque de ϕ.