TD 7 Applications

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Parmi ces fonctions lesquelles sont surjectives, injectives, bijectives ? Le justifier. $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & |x| \end{array}$ $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2-x-1 \end{array}$ $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \end{array}$

Exercice 2. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On suppose que f et g sont injectives. Montrer que $g \circ f$ est injective.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+\star}$ une application vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y).$$

1. Montrer que $f(0) = 1$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}, (f(x) = 1) \implies (x = 0)$.

Exercice 4. Décrire l'image et l'image réciproque de $[0, +\infty[$ par l'application f définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |2x-3| - |x+3|, \end{array}$$

on exprimera les résultats à l'aide d'intervalles.

Exercice 5. Déterminer l'application réciproque des fonctions définies par

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. 2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f_2(x,y) = (5x+2y, 4x-y)$

Correction

1. Pour montrer que f_1 réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on étudie l'équation d'inconnu réel x et de paramètre réel y : $f_1(x) = y$. On a :

$$\begin{aligned} f_1(x) = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\ &\iff e^{2x} - 1 = 2ye^x. \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $X = e^x$. On obtient alors

$$f_1(x) = y \iff X^2 - 2yX - 1 = 0$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4y^2 + 4 > 0$. Il en résulte, après simplification que

$$\begin{aligned} f_1(x) = y &\iff X = y + \sqrt{y^2+1} \text{ ou } X = y - \sqrt{y^2+1} \\ &\iff e^x = y + \sqrt{y^2+1} \text{ ou } e^x = y - \sqrt{y^2+1} \end{aligned}$$

Or $y^2+1>y^2\geq 0$ donc $\sqrt{y^2+1}>|y|\geq y$. D'où

$$f_1(x)=y \iff x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}).$$

De cette étude, on en déduit que f_1 réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et la bijection réciproque est donnée par :

$$\forall y\in\mathbb{R}, f_1^{-1}(y)=\ln(y+\sqrt{y^2+1}).$$

2. Étudions l'équation d'inconnu $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et de paramètre $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$f_2(x,y)=(a,b) \tag{E}$$

Résolvons par équivalence.

$$\text{(E)} \quad\iff (5x+2y,4x-y)=(a,b)$$

Donc

$$\text{(E)} \iff \left\{\begin{array}{lll} 5x+2y & = & a \\ 4x-y & = & b \end{array}\right.$$

En effctuant $L_2<-2L_2+L_1$:

$$\text{(E)} \iff \left\{\begin{array}{lll} 5x+2y & = & a \\ 13x & = & 2b+a \end{array}\right.$$

En sbstituant, on a alors

$$\text{(E)} \iff (x=\frac{2b+a}{13} \text{ et } y=\frac{4a-5b}{13}.$$

On en déduit que f_2 réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et l'application réciproque est donnée par

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, f_2^{-1}(a,b)=(\frac{2b+a}{13},\frac{4a-5b}{13}).$$

Exercice 6. 1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Construire une bijection de $[|0,n-1|]$ vers $[|1,n+1|]$.

2. Intuitivement, peut-construire une bijection entre $\{a,b,c\}$ et $\{1,2,3,4\}$?
3. Construire toutes les bijections entre $\{1,2,3\}$ et $\{a,b,c\}$.
4. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{llll} \phi: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (p,q) & \mapsto & 2^p(2q+1)-1 \end{array}$$

   (a) Montrer que ϕ est injective.
   (b) Montrer que ϕ est surjective.
   (c) En déduire qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
   (d) Déterminer la réciproque de ϕ.

Correction

1. Le premier ensemble contenant exactement n éléments et le deuxième $n+1$ éléments, une telle bijection ne peut exister.
2. De la même façon, il n'y a pas de bijection entre $\{a,b,c\}$ et $\{1,2,3,4\}$.

3. Construisons toutes les bijections entre ces deux ensembles. On représente les résultats à l'aide de tableau :
   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$, correspond à $f : \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ définie par $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c$.
   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & c & b \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & c \end{pmatrix}$
   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & c & a \end{pmatrix}$
   (e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & a & b \end{pmatrix}$
   (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ c & b & a \end{pmatrix}$
4. (a) Soient (p_1, q_1) et (p_2, q_2) éléments de $\mathbb{N}^2$ vérifiant :
$$\phi(p_1, q_1) = \phi(p_2, q_2).$$
   On a donc
$$2^{p_1}(2q_1 + 1) - 1 = 2^{p_2}(2q_2 + 1) - 1$$
   D'où : $2^{p_1}(2q_1 + 1) = 2^{p_2}(2q_2 + 1)$. On a donc $2^{p_1 - p_2}(2q_1 + 1) = 2q_2 + 1$. $2q_1 + 1$ et $2q_2 + 1$ étant impairs, nécessairement $p_1 = p_2$. Il en résulte que $q_1 = q_2$. D'où $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre $n + 1$ est donc un entier strictement positif. Notons p_0 le plus grand entier tel que 2^{p_0} divise $n + 1$. Par définition, 2^{p_0+1} ne divise pas $n + 1$. On peut donc écrire $n + 1 = 2^{p_0} r$. Or r est impair : sinon il y aurait une contradiction sur la définition de p_0. Il existe donc $q_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $2q_0 + 1 = r$. D'où $n + 1 = 2^{p_0}(2q_0 + 1)$. Donc $2^{p_0}(2q_0 + 1) - 1 = n$. On a donc $\phi(p_0, q_0) = n$. ϕ est bien surjective.
   (c) On a montré que ϕ est injective et surjective. Donc ϕ est une bijection entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$.
   (d) Dans la question 4a, on voit comment construire ϕ^{-1} : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_0 le plus grand entier tel que 2^{p_0} divise $n + 1$. On pose alors $q_0 = \frac{n+1-2^{p_0}}{2^{p_0+1}}$. On a $\phi^{-1}(n) = (p_0, q_0)$.