TD 8 Suites

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Donner une formule pour le terme général des suites définies ci-dessous :

1. $u_0 = 3, u_{n+1} = u_n + 5,$
2. $u_2 = \frac{1}{3}, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n,$
3. $u_1 = 1, u_{n+1} = 2u_n - 3,$
4. $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$
5. $u_0 = 2, u_1 = 1, 3u_{n+2} = 2u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n,$
6. $u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$

Pour les trois premières suites, calculer la somme des n premiers termes.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1, \\ u_{n+1} & = & \frac{u_n+3}{2u_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer les points fixes de la fonction $f : x \longmapsto \frac{x+3}{2x}$.
3. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{u_n - \frac{3}{2}}{u_n+1}$ est bien définie et est une suite géométrique.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+3} - 2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n.$$

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1} - x_n$. Calculer y_0, y_1 et montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = 2^n. \tag{1}$$
2. On désigne par (t_n) une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = a2^n$.
Déterminer la constante réelle a tel que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (1).
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, r_n = y_n - t_n$. Montrer que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une suite récurrente linéaire double et en déduire l'expression de r_n, y_n en fonction de n.
4. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k$$
et en déduire l'expression de x_n en fonction de n.

Exercice 4. Étudier les propriétés (monotonie, borne) de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & a \in [0,1] \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

où f est la fonction :

1. $f(x) = \sin(x)$
2. $f(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = x^3$