TD 8 Suites

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. Donner une formule pour le terme général des suites définies ci-dessous :

1. $u_0 = 3, u_{n+1} = u_n + 5$,
2. $u_2 = \frac{1}{3}, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n$,
3. $u_1 = 1, u_{n+1} = 2u_n - 3$,
4. $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$
5. $u_0 = 2, u_1 = 1, 3u_{n+2} = 2u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$,
6. $u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$

Pour les trois premières suites, calculer la somme des n premiers termes.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1, \\ u_{n+1} & = & \frac{u_n+3}{2u_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer les points fixes de la fonction $f : x \longmapsto \frac{x+3}{2x}$.
3. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{u_n - \frac{3}{2}}{u_n+1}$ est bien définie et est une suite géométrique.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Correction

1. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Par récurrence sur n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_n > 0$.
   — Initialisation : $u_0 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
   — Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie.
   Par hypothèse, $u_n > 0$. Donc $u_n + 3 > 0$ et $2u_n > 0$. On en déduit que le quotient $\frac{u_n+3}{2u_n} > 0$. Autrement dit, $u_{n+1} > 0$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
   — Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0.$$
   La suite est bien définie.
2. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$. Cette équation est définie pour $x \neq 0$.
   $$\begin{aligned} f(x) = x & \Leftrightarrow \frac{x+3}{2x} = x \\ & \Leftrightarrow x + 3 = 2x^2 \\ & \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+1)(x - \tfrac{3}{2}) = 0 \end{aligned}$$
   Les solutions de cette équation sont -1 et $\frac{3}{2}$. Les points fixes de f sont donc exactement -1 et $\frac{3}{2}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. u_n étant strictement positif, on en déduit que $u_n + 1 > 0$. Donc $\frac{u_n - \frac{3}{2}}{u_n+1}$ est bien définie. Autrement dit v_n est bien définie.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-\frac{3}{2}}{u_{n+1}+1}\\
&= \frac{\frac{u_n+3}{2u_n}-\frac{3}{2}}{\frac{u_n+3}{2u_n}+1}\\
&= \frac{\frac{u_n+3-3u_n}{2u_n}}{\frac{u_n+3+2u_n}{2u_n}}\\
&= \frac{-2u_n+3}{3u_n+3}\\
&= \frac{-2}{3}\frac{u_n-\frac{3}{2}}{u_n+1}\\
&= \frac{-2}{3}v_n
\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{-2}{3}$.

5. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant géométrique, on en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N}, v_n = (\frac{-2}{3})^n v_0 = \frac{-1}{4}(\frac{-2}{3})^n.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$v_n = \frac{u_n-\frac{3}{2}}{2u_n}.$$

Donc

$$2u_nv_n = u_n - \frac{3}{2}.$$

D'où

$$u_n(2v_n-1) = \frac{-3}{2}$$

Donc

$$u_n = \frac{-3}{2(2v_n-1)}$$

D'où

$$u_n = \frac{-3}{2(\frac{-1}{2}(\frac{-2}{3})^n-1)}$$

Donc

$$u_n = \frac{-3}{-\frac{-2}{3})^n-2)}$$

Exercice 3. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0=0, x_1=2, x_2=-1$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+3}-2x_{n+2}-5x_{n+1}+6x_n = 2^n.$$

1. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}, y_n = x_{n+1}-x_n$. Calculer y_0, y_1 et montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}, y_{n+2}-y_{n+1}-6y_n = 2^n. \tag{1}$$

2. On désigne par (t_n) une suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}, t_n = a2^n$.
Déterminer la constante réelle a tel que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (1).
3. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}, r_n = y_n - t_n$. Montrer que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une suite récurrente linéaire double et en déduire l'expression de r_n, y_n en fonction de n.
4. Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}, x_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k$$

et en déduire l'expression de x_n en fonction de n.

Correction

1. $y_0 = 2, y_1 = -3$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n &= (x_{n+3} - x_{n+2}) - (x_{n+2} - x_{n+1}) - 6(x_{n+1} - x_n) \\ &= x_{n+3} - 2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n \\ &= 2^n - (-2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n) - 2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n \quad (x_{n+3} = 2^n - (-2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n) \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien la relation donnée.

2. On désigne par (t_n) une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = a2^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$a2^{n+2} - a2^{n+1} - 6a2^n = 2^n \Leftrightarrow 2^n(4a - 2a - 6a) = 2^n$$

Ainsi, le problème est équivalent à déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$4a - 2a - 6a = 1 \Leftrightarrow -4a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{4}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = 2^n, t_{n+2} - t_{n+1} - 6t_n = 2^n.$$

Donc

$$(y_{n+2} - t_{n+2}) - (y_{n+1} - t_{n+1}) - 6(y_n - t_n) = 0.$$

Autrement dit,

$$\boxed{r_{n+2} - r_{n+1} - 6r_n = 0.}$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$X^2 - X - 6 = 0 \Leftrightarrow (X + 2)(X - 3) = 0.$$

On en déduit qu'il existe des réels A et B tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_n = A(-2)^n + B3^n.$$

Or $r_0 = y_0 - t_0 = \frac{9}{4}, r_1 = \frac{-5}{2}$. En résolvant le système, on obtient

$$A = \frac{37}{20}, B = \frac{2}{5}.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_n = \frac{37}{20}(-2)^n + \frac{2}{5}(3^n), y_n = \frac{37}{20}(-2)^n + \frac{2}{5}(3^n) - 2^{n-2}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k).$$

On reconnaît une somme télescopique. D'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k = x_n - x_0 = x_n.$$

On a

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k.$$

En remplaçant y_k par son expression, on obtient

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1}(\frac{37}{20}(-2)^k + \frac{2}{5}(3^k) - 2^{k-2})$$

Par linéarité,

$$x_n = \frac{37}{20}\sum_{k=0}^{n-1}(-2)^k + \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{n-1}(3^k) - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}2^k$$

On reconnaît des sommes de termes de suites géométriques de raison différente de 1, d'où

$$x_n = \frac{37}{60}(1 - (-2)^n) + \frac{1}{5}(3^n - 1) - \frac{1}{4}(2^n - 1)$$

Finalement,

$$\boxed{x_n = \frac{-37}{60}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n - 2^{n-2} + \frac{2}{3}}$$

Exercice 4. Étudier les propriétés (monotonie, borne) de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & a \in [0,1] \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

où f est la fonction :

1. $f(x) = \sin(x)$ 2. $f(x) = x^2 + 1$ 3. $f(x) = x^3$

Correction

1. Montrons que (u_n) est bornée et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $P(n) : u_n \in [0,1], u_{n+1} \leq u_n$.
   - Initialisation : par définition de u_0, on a $u_0 \in [0,1]$. De plus, la fonction $g : x \mapsto x - \sin(x)$ étant la différence d'un polynôme et d'une fonction sinus, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0.$$
   g est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et :
   $$\forall x \geq 0, g(x) \geq 0..$$
   Or $u_0 \geq 0$. D'où $g(0) \geq 0$. Autrement dit, $u_0 \geq \sin(u_0)$. Par conséquent, $u_0 \geq u_1$ et $P(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ l'est.
   D'après $P(n)$, $0 \leq u_n \leq 1$. Donc par croissance de la fonction sin, $\sin(0) \leq \sin(u_n) \leq \sin(1) < 1$. D'où $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. De plus, $u_{n+1} \leq u_n$. Par croissance de la fonction sin, on en déduit que $P(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : la suite (u_n) est bornée et la suite est décroissante.
2. Montrons que la suite (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_n \geq n, u_n \leq u_{n+1}$.
   - Initialisation : par définition de u_0, on a $u_0 \in [0,1]$. Donc $u_0 \geq 0$ et $u_1 = 1 + u_0^2 \geq 1 \geq u_0$. $P(0)$ est donc vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ l'est.
   D'après $P(n)$, $u_n \geq n$. Donc $u_n^2 + 1 \geq n^2 + 1 \geq n + 1$. D'où $u_{n+1} \geq n + 1$. Par hypothèse, $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$. En élevant au carré, on obtient $u_n^2 \leq u_{n+1}^2$. D'où $u_n^2 + 1 \leq u_{n+1}^2 + 1$. Autrement dit, $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : la suite (u_n) est croissante et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.

   Par passage à la limite, on en déduit que la suite tend vers $+\infty$.
3. Montrons que la suite (u_n) est décroissante et la suite est à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_n \in [0,1] u_{n+1} \leq u_n$.
   - Initialisation : par définition de u_0, on a $u_0 \in [0,1]$ et $u_0^3 \leq u_0$. $P(0)$ est donc vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ l'est. D'après $P(n)$, $u_n \in [0,1]$ en élevant au cube, on a bien $u_n^3 \in [0,1]$. Par hypothèse, $u_{n+1} \leq u_n$. Par croissance de la fonction cube sur $\mathbb{R}$, il en résulte que $u_{n+1}^3 \leq u_n^3$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : la suite (u_n) est décroissante et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.