

TD 9 dénombrement

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

- Exercice 1.**
1. On dispose de 30 appareils différents et de 40 prises différentes. Combien y-a-t-il de façons de brancher tous les appareils. On suppose qu'il y a plus de prises que d'appareils.
 2. Dans un jeu de 52 cartes usuel, on pioche une main de 5 cartes au hasard. Combien y-a-t-il mains possibles ? Dans ce contexte, l'ordre dans lequel apparaît les cartes n'a pas d'importance.
 3. Un équipage de 10 pirates a découvert le trésor caché de Barbe Noire. Celui-ci est composé de 100 pièces d'or. Combien y-a-t-il de façons de répartir toutes les pièces entre ces pirates ? Un pirate donné pouvant avoir 0 ou la totalité des pièces. Une répartition possible est $(15, 2, 4, 3, 0, 23, 30, 9, 0, 10)$: le premier pirate reçoit 15 pièces, le deuxième 2, ..., le dernier 10 pièces.

Exercice 2. On fixe un entier $n \geq 1$. On considère un tableau T_n comportant 2 lignes à n cases. Par exemple, pour T_7 , on a comme tableau :

1. Combien y-t-il de façons de numéroter toutes les cases de T_n par les nombres de 1 à $2n$, tous ces nombres apparaissant au moins 1 fois dans T_n .
2. Combien y-a-t-il de façons de numéroter toutes les cases de 1 à n tous ces nombres apparaissant exactement 2 fois dans T_n .
3. Combien y-a-t-il de façons de numéroter toutes les cases de T_n par les nombres de 1 à $2n$ de sorte que les numéros apparaissent dans l'ordre croissant dans chaque ligne ?
4. Combien y-a-t-il de façons de numéroter toutes les cases de T_n par les nombres de 1 à $2n$ de sorte que les numéros apparaissent dans l'ordre croissant dans chaque colonne ? Par convention, la première ligne est la ligne du haut.

Exercice 3. On veut déterminer toutes les partitions de l'ensemble $[[24]] = \{1, 2, \dots, 24\}$ où toutes les parts on le même cardinal.

1. En combien de parts peut-on partitionner l'ensemble $[[24]]$ de sorte que chacune des parts ait le même cardinal ?
2. Soit $d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Déterminer le nombre de partitions dont toutes les parts ont exactement d éléments.
3. En déduire le nombre de partitions de $[[24]]$ dont toutes les parts ont le même cardinal.

Exercice 4. On fixe $n \geq 1$. On note $S = \{f : [[3n]] \rightarrow [[n]] \mid f \text{ surjective}\}$.

1. Déterminer le cardinal de $\{f \in S \mid \text{tout élément de } [[n]] \text{ a exactement 3 antécédents par } f\}$.
2. Déterminer le cardinal de $\{f \in S \mid \text{exactement un élément de } [[n]] \text{ a au moins 2 antécédents par } f\}$.
3. Déterminer le cardinal de $\{f \in S \mid \text{exactement deux éléments de } [[n]] \text{ a au moins 2 antécédents par } f\}$.

Exercice 5. Soit $n \geq 1$. On veut dénombrer le nombre de partitions de $[[n]]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- toutes les parts sont de taille 1 ou 2
- toutes les parts de taille 2 sont de la forme $\{i, i + 1\}$.

On note u_n le nombre de ces partitions.

1. Décrire toutes ces partitions dans le cas $n = 1, 2, 3$.
2. Montrer que $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n .