TD 9 dénombrement

BCPST 1 2019-2020

V.Vong

Exercice 1. 1. On dispose de 30 appareils différents et de 40 prises différentes. Combien y-a-t-il de façons de brancher tous les appareils. On suppose qu'il y a plus de prises que d'appareils.

2. Dans un jeu de 52 cartes usuel, on pioche une main de 5 cartes au hasard. Combien y-a-t-il mains possibles ? Dans ce contexte, l'ordre dans lequel apparaît les cartes n'a pas d'importance.
3. Un équipage de 10 pirates a découvert le trésor caché de Barbe Noire. Celui-ci est composé de 100 pièces d'or. Combien y-a-t-il de façons de répartir toutes les pièces entre ces pirates ? Un pirate donné pouvant avoir 0 ou la totalité des pièces. Une répartition possible est $(15, 2, 4, 3, 0, 23, 30, 9, 0, 10)$: le premier pirate reçoit 15 pièces, le deuxième 2,..., le dernier 10 pièces.

Exercice 2. On fixe un entier $n \geq 1$. On considère un tableau T_n comportant 2 lignes à n cases. Par exemple, pour T_7, on a comme tableau :

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

1. Combien y-t-il de façons de numéroter toutes les cases de T_n par les nombres de 1 à $2n$, tous ces nombres apparaissant au moins 1 fois dans T_n.
2. Combien y-a-t-il de façons de numéroter toutes les cases de 1 à n tous ces nombres apparaissant exactement 2 fois dans T_n.
3. Combien y-a-t-il de façons de numéroter toutes les cases de T_n par les nombres de 1 à $2n$ de sorte que les numéros apparaissent dans l'ordre croissant dans chaque ligne ?
4. Combien y-a-t-il de façons de numéroter toutes les cases de T_n par les nombres de 1 à $2n$ de sorte que les numéros apparaissent dans l'ordre croissant dans chaque colonne ? Par convention, la première ligne est la ligne du haut.

Exercice 3. On veut déterminer toutes les partitions de l'ensemble $[|24|] = \{1, 2, \ldots, 24\}$ où toutes les parts on le même cardinal.

1. En combien de parts peut-on partitionner l'ensemble $[|24|]$ de sorte que chacune des parts ait le même cardinal ?
2. Soit $d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Déterminer le nombre de partitions dont toutes les parts ont exactement d éléments.
3. En déduire le nombre de partitions de $[|24|]$ dont toutes les parts ont le même cardinal.

Exercice 4. On fixe $n \geq 1$. On note $S = \{f : [|3n|] \to [|n|] \| f \text{ surjective}\}$.

1. Déterminer le cardinal de $\{f \in S | \text{tout élément de } [|n|] \text{ a exactement 3 antécédents par } f\}$.
2. Déterminer le cardinal de $\{f \in S | \text{exactement un élément de } [|n|] \text{ a au moins 2 antécédents par } f\}$.
3. Déterminer le cardinal de $\{f \in S | \text{exactement deux éléments de } [|n|] \text{ a au moins 2 antécédents par } f\}$.

Correction

1. Notons $E = \{f \in S | \text{tout élément de } [|n|] \text{ a exactement 3 antécédents par } f\}$. Tout élément f de E est caractérisé par la liste $[f^{-}(1), f^{-}(2), \ldots, f^{-}(n)]$. Déterminer le nombre d'élément de E revient donc à compter le nombre de listes précédentes. Or :
   — pour le premier élément de la liste, on a $\binom{3n}{3}$ choix possibles,

— pour le deuxième élément, on a $\binom{3n-3}{3}$ choix possibles,
— ...
— pour le n^{e} élément, on a $\binom{3}{3}$ choix possibles.
Il en résulte que

$$\mathrm{Card}(E) = \prod_{k=1}^{n} \binom{3n-3k}{3}.$$

Après simplification, on obtient $\mathrm{Card}(E) = \frac{(3n)!}{(3!)^n}$

2. Notons $F = \{f \in S |$exactement un élément de $[|n|]$ a au moins 2 antécédents par $f\}$. Soit un élément f de F, on sait qu'il existe un unique élément a de $[|n|]$ ayant au moins 2 antécédents. f étant surjective, les autres ont donc au moins un antécédent et strictement moins de 2. Donc les autres valeurs ont exactement un antécédent par f. Sachant que f est définie sur $[3n]$ l'élément a a donc $2n+1$ antécédent par f.
   Ainsi, tout élément de f est caractérisé par les deux points suivants :
   — un élément $a \in [|n|]$ ayant exactement $2n+1$ antécédents par f,
   — f réalise une bijection de $[|3n|] \backslash f^{-}(\{a\})$ vers $[|n|] \backslash \{a\}$
   Or on a n façons de choisir l'élément a puis $\binom{3n}{2n+1}$ façons de choisir ses antécédents. Il y a alors $(n-1)!$ choix pour la bijection. Ainsi :

$$\mathrm{Card}(F) = n\binom{3n}{2n+1}(n-1)! = \frac{(3n)!n}{(2n+1)!}.$$

3. Remarquons que pour $n = 1$, il n'y en n'a pas. Désormais, on suppose $n \geq 2$. On pose :
   $G = \{f \in S |$exactement deux éléments de $[|n|]$ a au moins 2 antécédents par $f\}$.
   Soit f un élément de G. On sait que deux éléments distincts a, b de $[|n|]$ on plus de deux antécédents. De la même façon que précédemment, les autres en ont exactement 1. On sait donc que $f^{-}(\{a, b\})$ est de cardinal $2n+2$. Ces $2n+2$ éléments ont soit a ou b comme image, au moins deux d'entre eux ont pour image a, au moins deux d'entre ont pour image a. Les éléments $f \in G$ sont donc caractérisés par les données suivantes :
   — deux valeurs distinctes a, b de $[|n|]$ ayant plus de deux antécédents,
   — un choix de $2n+2$ valeurs parmi $3n$ à répartir entre ce qui auront a ou b pour image.
   — f réalise une bijection entre $[|3n|] \backslash f^{-}(\{a, b\}$ et $[|n|] \backslash \{a, b\}$
   Les cardinaux des différentes données :
   — on peut choisir a, b de $\binom{n}{2}$ façons,
   — on peut choisir $f^{-}(\{a, b\})$ de $\binom{3n}{2n+2}$ façons,
   — il y a $\sum_{k=2}^{2n} \binom{2n+2}{k} = 2^{2n+2} - 2(1+2n+2)$ façons de répartir les éléments ayant pour image a ou b
   — on peut choisir une des $(n-2)!$ bijections pour les $n-2$ éléments restants.
   Ce qui donne :

$$\mathrm{Card}(G) = \binom{n}{2}\binom{3n}{2n+2}(2^{2n+2} - 4n - 6)(n-2)!$$

Exercice 5. Soit $n \geq 1$. On veut dénombrer le nombre de partitions de $[|n|]$ vérifiant les propriétés suivantes :
— toutes les parts sont de taille 1 ou 2
— toutes les parts de taille 2 sont de la forme $\{i, i+1\}$.
On note u_n le nombre de ces partitions.

1. Décrire toutes ces partitions dans le cas $n = 1, 2, 3$.
2. Montrer que $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Correction

1. — Pour $n = 1$: $\{\{1\}\}$
   — Pour $n = 2$: $\{\{1, 2\}, \{\{1\}, \{2\}\}$
   — Pour $n = 3$: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}$

2. Supposons $n \geq 3$. pour tout $k \geq 1$, on note E_k l'ensemble des partitions de $[|k|]$ vérifiant les propriétés de l'énoncé. Constatons que l'on a :

$$E_n = \{A \cup \{\{n\}\}, A \text{ décrit } E_{n-1}\} \cup \{A \cup \{\{n-1, n\}\}, A \text{ décrit } E_{n-2}\}$$

En effet, étant donné un élément P de E_n soit n est un élément d'un singleton soit c'est un élément de $\{n-1, n\}$. De plus, cette réunion est disjointe car n est soit dans une part de taille 1 soit dans une part de taille 2, ces possibilités s'xcluant mutuellement. En passant au cardinal, on obtient :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

3. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 avec comme conditions initiales : $u_1 = 1, u_2 = 2$.
Après résolution, on trouve :

$$\forall n \geq 1, u_n = \frac{-3\sqrt{5}+5}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{3\sqrt{5}+5}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$