

# Programme de colle 12

## 16 au 20 décembre 2024

### Notions

---

↳ *En un coup d'œil, les notions qui ont été vues en cours et sur lesquelles portent les colles de la semaine.*

#### Chapitre 10 : Systèmes linéaires

- Notion de système linéaire, matrice des coefficients, second membre, homogénéité, compatibilité.
- L'algorithme du pivot de Gauss, les trois opérations élémentaires, notion de système échelonné. Inconnues principales et inconnues libres, équations principales et conditions de compatibilité, rang. Systèmes de Cramer, systèmes de rang maximal.

#### Chapitre 11 : Dénombrement

- Ensembles finis, cardinal, inclusion, intersection. Applications injectives ou surjectives ou bijectives entre ensembles finis.
- Cardinaux des constructions usuelles sur les ensembles : union, produit cartésien, listes d'éléments de  $E$ , applications  $E \rightarrow F$ , listes sans répétitions, permutations. Parties de  $E$  à  $k$  éléments, parties de  $E$ .
- Interprétation combinatoire des formules sur les coefficients binomiaux.

### Savoir-faire

---

↳ *Description des compétences attendues et des types d'exercices possibles.*

- Échelonner et résoudre un système linéaire. Utiliser les opérations élémentaires. Donner le rang, les conditions de compatibilité, les inconnues libres.
- Étudier des systèmes linéaires avec des paramètres.
- Dénombrer dans de nombreuses situations concrètes, notamment en se ramenant aux constructions sur les ensembles.
- Exemples de situations : asseoir des gens, former des groupes de gens, jeux de 32 cartes, former des mots, anagrammes, ...

### Questions de cours

---

↳ *Les questions à travailler et à savoir refaire, incluant l'énoncé précis et la démonstration.*

- (exercice) Soit  $E$  l'ensemble des polynômes de degré au plus 2, soit l'application  $\varphi : \left\{ \begin{array}{c} E \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(1), P(2), P(3)) \end{array} \right.$ . Montrer avec un système linéaire que  $\varphi$  est bijective puis donner l'application réciproque.
- (exercice) Idem avec  $\psi : \left\{ \begin{array}{c} E \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(1), P'(2), P(3)) \end{array} \right.$ . Montrer avec un système linéaire que  $\psi$  n'est ni injective ni surjective.
- (exercice) Donner toutes les solutions de  $\mathcal{S}_\lambda : \begin{cases} 4x+6y=\lambda x \\ -x-y=\lambda y \end{cases}$ , d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , en fonction du paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$
- Si les  $A_1, \dots, A_n$  sont deux à deux disjoints alors  $\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i)$ .
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$
- Cardinal de l'ensemble des parties de  $E$  via les fonctions indicatrices :  $\Psi : \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{P}(E) \rightarrow \{0,1\}^E \\ A \mapsto \chi_A \end{array} \right.$  est une bijection.