Chapitre 2
Méthodes de démonstration

I Implications

But : démontrer une proposition du type « $P \Longrightarrow Q$ ».

I.1 Implication directe

On *suppose* que P est vraie. Puis, par un enchaînement d'arguments logiques, on démontre que Q est vraie.
La rédaction commence donc par « Supposons P. Démontrons Q [...] » ou bien « Supposons P [...] donc on a démontré Q. »

Exemple 1. Soit n un nombre entier. Montrer que si n est pair, alors n^2 est pair.

Solution. Supposons que n soit pair.
Cela signifie qu'il existe un nombre $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. On calcule alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc $n^2 = 2 \times (2k^2)$.
On a démontré que n^2 est pair. □

Exemple 2. Soit n un nombre entier. Montrer que si n est impair, alors n^2 est impair.

I.2 Contraposée

Il peut être plus facile de s'intéresser à la proposition « non$(Q) \Longrightarrow$ non(P) » qui est **équivalente** à $P \Longrightarrow Q$. La rédaction commence par « Utilisons la contraposée : démontrons que [on réécrit la contraposée] » puis se poursuit comme pour démontrer une implication § I.1.

Exemple 3. Soient x, y deux nombres réels positifs. Montrer que si $x \neq y$ alors $x^2 \neq y^2$.

Solution. Montrons la contraposée : si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.
Supposons $x^2 = y^2$.
Alors $x^2 - y^2 = 0$ et $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Donc soit $x - y = 0$ soit $x + y = 0$.
Dans le premier cas $x = y$.
Dans le deuxième cas $x = -y$ donc x et y sont de signe contraire. Ils ne peuvent être tous les deux positifs que si $x = y = 0$.
Donc on a démontré que dans tous les cas $x = y$. □

Exemple 4. Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ est un nombre rationnel et $y \in \mathbb{R}$ est irrationnel alors $x + y$ est irrationnel.

I.3 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer une proposition P, on suppose que P est fausse puis par un enchainement d'arguments logiques on aboutit à une contradiction (on démontre une assertion qu'on sait être fausse). C'est donc qu'il n'est pas possible que P soit fausse, et donc que P est vraie !

Exemple 5. Montrer que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Solution. Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel.
Cela signifie qu'il existe des nombres $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Élevant au carré des deux côtés on obtient $2 = \frac{p^2}{q^2}$ donc $p^2 = 2q^2$. Cela signifie que le nombre p^2 est pair.
Le nombre p est donc aussi pair, comme vu dans § I.1. Mais en écrivant qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$ alors on obtient $(2k)^2 = 2q^2$ donc $4k^2 = 2q^2$ soit $2k^2 = q^2$. Mais de même cela implique que q^2 est pair puis que q est pair.
Les nombres p et q sont donc tous les deux divisibles par 2 ce qui est en contradiction avec le fait pouvoir les choisir premiers entre eux. Donc $\sqrt{2}$ ne peux pas être rationnel.
On a démontré par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel. □

II Équivalences

But : démontrer une proposition du type « $P \Longleftrightarrow Q$ ».

II.1 Par raisonnement par équivalences

On utilise plusieurs étape de raisonnement où **chaque passage** d'une étape à l'autre est une équivalence.

Exemple 6. Vu en cours : montrer que pour tous ensembles A, B, C alors $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Cela revient à montrer $x \in A \cap (B \cup C) \Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

II.2 Par implication et réciproque

Souvent, raisonner directement par équivalences n'est pas si facile. Alors on démontre séparément que sont vraies $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$.
En rédigeant on n'hésite pas à écrire nettement séparés « Sens direct : » pour signifier qu'on va démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$ (parfois même tout simplement « $\Longrightarrow$: ») puis « Sens réciproque : » (ou tout simplement « $\Longleftarrow$: »).

Exemple 7. Soit x un nombre réel, soit M un nombre réel positif. Montrer que sont équivalentes les conditions (i) : $|x| \leqslant M$ et (ii) : $-M \leqslant x \leqslant M$.

Parfois on a affaire à une *chaine d'implications* et d'équivalences plus compliquée :

Exemple 8. Montrer que les conditions précédentes sont aussi équivalentes à
(iii) : $x^2 \leqslant M^2$.

III Avec des ensembles

Rappelons que démontrer une inclusion d'ensembles $A \subset B$ n'est rien d'autre que démontrer l'implication « $x \in A \Longrightarrow x \in B$ » pour tout élément x, et démontrer l'égalité $A = B$ est démontrer l'équivalence « $x \in A \Longleftrightarrow x \in B$ ». À nouveau cette dernière peut parfois se faire par équivalence directe, mais aussi fréquemment par double implication. On dit alors qu'on démontre l'égalité d'ensembles par double inclusion, ce qui revient à démontrer séparément $A \subset B$ et $B \subset A$.

Exemple 9. Montrer que $\{2x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty[$.

Solution. Montrons d'abord l'inclusion $\subset$:
Soit un nombre $y \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = 2x^2 + 1$. Comme $x^2 \geqslant 0$, on en déduit $2x^2 + 1 \geqslant 1$. Donc $y \in [1, +\infty[$.
Montrons maintenant l'inclusion $\supset$:
Soit un nombre $y \in [1, +\infty[$. Il s'agit de trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $2x^2 + 1 = y$. Ceci revient à résoudre l'équation $2x^2 = y - 1$, qui est équivalente à $x^2 = \frac{y-1}{2}$. Comme $y \geqslant 1$, alors le terme de droite est positif donc admet bien une racine carrée : on pose $x = \sqrt{\frac{y-1}{2}}$. □

Exemple 10. Montrer que :

$$\{(a + 1, 3a - 1) \mid a \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y = 4\} \tag{1}$$

IV Quantificateur ∀

But : démontrer une proposition du type « $\forall x \in E,\ P(x)$ »

IV.1 Direct

Il faut commencer par considérer un élément x de E *quelconque* (car démontrer pour tous = démontrer pour un, quelconque, n'importe lequel) puis démontrer que $P(x)$ est vraie.
La rédaction commence donc par « Soit $x \in E$. Démontrons $P(x)$. » ou bien « Soit $x \in E$ [...] on a démontré $P(x)$ ». La conclusion reprend parfois le début : « On a démontré $P(x)$, et ceci est valable pour tout $x \in E$. »

IV.2 Disjonction de cas

Parfois on ne peut pas démontrer directement que $P(x)$ est vraie pour *tout* x dans un ensemble E mais il faut faire des hypothèses supplémentaires sur x, qui conduisent à traiter séparément différents cas. Il faut bien que tout élément de E soit considéré dans au moins l'un des cas !

Exemple 11. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère deux cas :
- Si $x \geqslant 0$: alors $x^2 = x \times x$ est produit de deux nombres positifs, donc est positif : $x^2 \geqslant 0$.
- Si $x \leqslant 0$: alors $x^2 = x \times x$ est produit de deux nombres négatifs, donc est positif : $x^2 \geqslant 0$.

On a bien montré dans tous les cas : $x^2 \geqslant 0$. □

Remarque 1. Dans cet exemple, $x = 0$ est considéré dans les *deux* cas. Est-ce un problème ?

Exemple 12. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{x+|x|}{2} = \max(x, 0)$.

Exemple 13. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est entier.

V Quantificateur ∃

But : démontrer une proposition du type « $\exists x \in E,\ P(x)$ ».
Pour que cela soit vrai, il *suffit* en principe de donner un élément x de E (par exemple par une formule, ou par une méthode pour le choisir) et de démontrer que $P(x)$ est vraie. Du point de vue logique, peu importe *comment* on a trouvé cet élément ni s'il y a plusieurs possibilités... du point de vue de la rédaction, par contre, il peut être bon d'expliquer un petit peu comment on trouve.

V.1 Direct

Il arrive qu'on puisse voir directement une valeur de x qui convient. La rédaction commence par « Posons $x = \cdots$ Démontrons $P(x)$. »

Exemple 14. Démontrer que : $\exists x \in \mathbb{R},\ x^3 - x + x - 1 = 0$.

V.2 * Non constructive

Il arrive que l'on puisse démontrer une existence sans dire précisément *quel* objet vérifie la proposition ! C'est par exemple le cas quand on utilise le principe des tiroirs, qui se démontre par l'absurde :

Exemple 15. Si on range $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, alors l'un des tiroirs contient au moins deux chaussettes.

Application :

Exemple 16. Soit $E \subset [0,1[$ un ensemble de 5 éléments. Montrer qu'il existe deux éléments x, y de E, distincts, dont l'écart est inférieur strictement à $\frac{1}{4}$.

V.3 Analyse-synthèse

Donner directement le bon x peut être difficile ! On commence donc par supposer qu'on a bien un x qui est solution du problème. Puis on déduit de là diverses propriétés de x jusqu'à arriver à une formule, une caractérisation, qui permette effectivement de donner une valeur de x. Il est alors impératif de **vérifier que le x qu'on donne est bien solution du problème** : c'est la partie « synthèse ».

Exemple 17. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomiale de degré 2 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) - f(x) = x \tag{2}$$

Solution. On cherche des nombres $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ vérifie la condition ci-dessus.
Analyse : si de tels nombres existent alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(a(x+1)^2 + b(x+1) + c\big) - \big(ax^2 + bx + c\big) = x. \tag{3}$$

Développant et regroupant les termes, cela donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a(x^2 + 2x + 1) + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = x \tag{4}$$

soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2ax + (a+b) = x. \tag{5}$$

On voit qu'on peut alors prendre $a = \frac{1}{2}$ puis $b = -\frac{1}{2}$, et une valeur quelconque pour c (par exemple $c = 0$).
Synthèse : posons $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$. Alors les mêmes calculs que ci-dessus montrent que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a bien $f(x+1) - f(x) = x$. □

Exemple 18. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire (c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ p(-x) = p(x)$) et une fonction $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire (c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ i(-x) = -i(x)$) telles que $f = p + i$ (c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = p(x) + i(x)$).

V.4 Unicité

Parfois on veut démontrer « il existe un unique $x \in E$ tel que $P(x)$ ». Alors :

1. Il arrive que cela soit clair car la démonstration d'existence qu'on a donnée nous dit que « c'est forcément celui-là ».
2. Soit on sépare la preuve en deux parties. D'abord on démontre l'existence d'un élément x de E vérifiant $P(x)$. Puis on en démontre l'unicité en prouvant que si x, y sont deux éléments de E pour lesquels $P(x)$ et $P(y)$ sont tous les deux vrais alors $x = y$. Formellement, « il existe un unique » signifie :

$$\big(\exists x \in E,\ P(x)\big) \text{ et } \big(\forall x, y \in E,\ (P(x) \text{ et } P(y)) \Longrightarrow x = y\big) \tag{6}$$

Exemple 19. Dans l'exemple 18, montrer que les fonctions p, i sont uniques.

VI Le raisonnement par récurrence

On souhaite démontrer une propriété du type « $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ » où P est une propriété sur les nombres **entiers positifs**.

VI.1 Principe de base

Le principe de récurrence énonce que cela est vrai si on démontre :
— que $P(0)$ est bien vérifié (initialisation),
— et qu'on a aussi $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité)
La rédaction correspondante en découle donc : d'abord une partie initialisation « Démontrons $P(0)$. » puis une partie hérédité « Soit $n \in N$. Supposons $P(n)$. Démontrons $P(n+1)$ ».
L'ordre des quantificateurs joue un grand rôle ! **Il ne faut surtout pas écire** « supposons $\forall n,\ P(n)$ » **car c'est cela qu'on veut démontrer !** Le $\forall n \in \mathbb{N}$ est à l'extérieur de l'implication !
Il y a quelques variations de la récurrence : parfois elle commence à 1 et pas à 0.

Exemple 20. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{7}$$

VI.2 Récurrence double

Cela se produit quand la propriété $P(n)$ est impliquée par la propriété aux *deux* rangs précédents. C'est utile pour traiter des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par une relation donnant u_{n+2} en fonction de u_n et u_{n+1}. Alors le principe s'énonce ainsi : pour démontrer $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ il suffit de démontrer :

- que $P(0)$ et $P(1)$ sont toutes les deux vraies,
- qu'on a aussi $\forall n \in \mathbb{N},\ \big(P(n) \text{ et } P(n+1)\big) \Rightarrow P(n+2)$

Ainsi dans la rédaction l'étape de récurrence se rédigera comme « Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$. Montrons $P(n+2)$. »

Exemple 21. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 0$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 5 \times 2^n - 2 \times 5^n$.