Chapitre 3
Nombres reéls

I Formulaire

I.1 L'addition

L'addition de nombres réels vérifie les propriétes suivantes :

- **Commutativité** :
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x+y=y+x \tag{1}$$
- **Associativité** :
$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad (x+y)+z=x+(y+z) \tag{2}$$
- 0 est un **élément neutre pour l'addition** :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x+0=0+x=x \tag{3}$$
- Tout nombre admet un **opposé** :
$$\forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R},\quad x+y=y+x=0 \tag{4}$$
L'opposé de x est unique et est noté $-x$.

I.2 La multiplication

Pour la multiplication les propriétés sont les suivantes :

- **Commutativité** :
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\cdot y=y\cdot x \tag{5}$$
- **Associativité** :
$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z) \tag{6}$$
- 1 est un **élément neutre pour la multiplication** :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x\cdot 1=1\cdot x=x \tag{7}$$
- Tout nombre **non nul** admet un **inverse** :
$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \exists y\in\mathbb{R},\quad x\cdot y=y\cdot x=1 \tag{8}$$
L'inverse de $x\neq 0$ est unique et est noté $\frac{1}{x}$, ou aussi x^{-1}.

I.3 Relation entre les deux

- 0 est un **élément absorbant** pour la multiplication :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x\cdot 0=0\cdot x=0 \tag{9}$$
- La multiplication est **distributive** sur l'addition :
$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z \tag{10}$$
- Ceci a pour *conséquence* la règle plus générale
$$\forall (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4,\quad (a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d \tag{11}$$
ainsi que les identités remarquables : $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$,
$$(a+b)^2=a^2+2a\cdot b+b^2 \tag{12}$$
$$(a-b)^2=a^2-2a\cdot b+b^2 \tag{13}$$
$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2 \tag{14}$$
- De plus,
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\cdot y=0 \Longleftrightarrow x=0 \text{ ou } y=0 \tag{15}$$
et ainsi
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x^2=0 \Longleftrightarrow x=0 \tag{16}$$

I.4 La relation d'ordre

Remarque 1. Il est plus facile de s'intéresser avant tout à $\leqslant$ et d'énoncer les propriétés.

- Pour aligner des équations les unes au-dessus des autres on préfère largement les écrire toujours dans le même sens $x\leqslant y$ plutot que $y\geqslant x$.
- C'est à partir de $\leqslant$ qu'on définit $x<y$ par « $x\leqslant y$ et $x\neq y$ ».
- On rappelle au passage que la négation de $x\leqslant y$ est $x>y$: si le premier est vrai avec $x=y$ alors son contraire ne doit pas l'être ! De même la négation de $x<y$ est $x\geqslant y$.

L'ordre $\leqslant$ vérifie les propriétés suivantes :

— **Réflexivité** :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x \tag{17}$$

— **Anti-symétrie** :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Longrightarrow x = y \tag{18}$$

— **Transitivité** :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Longrightarrow x \leqslant z \tag{19}$$

Remarque 2. L'inclusion entre ensembles vérifie les trois propriétés ci-dessus... On peut parler de relation d'ordre dans d'autres contextes que les nombres réels !

I.5 Compatibilité avec les opérations

— Avec l'addition :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall a \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \Longrightarrow x + a \leqslant y + a \tag{20}$$

En *conséquence*, on peut ajouter membre à membre des inégalités.

— Avec la multiplication :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall a \geqslant 0, \quad x \leqslant y \Longrightarrow a \cdot x \leqslant a \cdot y \tag{21}$$

Remarque 3. Est-ce vrai en remplaçant $\leqslant$ par $<$?

En *conséquence*, on peut multiplier membre à membre des inégalités **positives**.

— Opposé :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \Longrightarrow -y \leqslant -x \tag{22}$$

Ainsi pour soustraire des inégalités, il faut mieux écrire d'abord l'opposé puis additionner, en prêtant attention à l'ordre.

— Inverse :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < x \leqslant y \Longrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} \tag{23}$$

Idem : pour diviser des inégalités, il faut mieux d'abord écrire les inverses puis multiplier, tout dans le bon sens...

Remarque 4. Quand a-t-on équivalence ?