Chapitre 4
Trigonométrie

I Valeurs et propriétés remarquables

I.1 Le cercle trigonométrique

Les fonctions de base sont :

$$\sin(x) \qquad \cos(x) \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{1}$$

Le théorème de Pythagore implique que

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1 \tag{2}$$

et le théorème de Thalès implique que $\tan(x)$ est bien la longueur de la tangente entre les angles 0 et x. Son domaine de définition est :

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \cdots \left] -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\cup \cdots \tag{3}$$

Les fonctions sin et cos sont périodiques de période 2π :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \qquad \forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \tag{4}$$

Donc tan est aussi périodique.

I.2 Valeurs de base

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

(5)

Remarque 1.

$$\begin{aligned} & 0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \\ \rightsquigarrow \quad & \frac{\sqrt{0}}{2} < \frac{\sqrt{1}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{4}}{2} \end{aligned} \tag{6}$$

I.3 Symétries

Symétrie par rapport à l'axe horizontal (= parité des fonctions) :

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x) \qquad \tan(-x) = -\tan(x) \tag{7}$$

Symétrie par rapport à l'origine (= demi-tour) :

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x) \qquad \cos(x+\pi) = -\cos(x) \qquad \tan(x+\pi) = \tan(x) \tag{8}$$

On en déduit que tan est périodique de période π :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \quad x + k\pi \in \mathcal{D}_{\tan} \text{ et } \tan(x + k\pi) = \tan(x) \tag{9}$$

Symétrie par rapport à l'axe vertical :

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \qquad \cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \tan(\pi - x) = -\tan(x) \tag{10}$$

Symétrie par rapport à la diagonale :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)} \tag{11}$$

Quart de tour :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \qquad \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)} \tag{12}$$

Remarque 2. Les deux premières sont dans le même sens que pour la dérivée :

$$\sin'(x) = \cos(x) \qquad \cos'(x) = -\sin(x) \tag{13}$$

Est-ce un hasard ? . . .
En dérivant on trouve aussi

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \tag{14}$$

II Formules d'addition

Les plus fondamentales :

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \end{aligned}} \tag{15}$$

D'où aussi

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \tag{16}$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \tag{17}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \tag{18}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} \tag{19}$$

Donc les formules de duplication :

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \tag{20}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \tag{21}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} \tag{22}$$

III Représentations graphiques

FIGURE 1 – sin

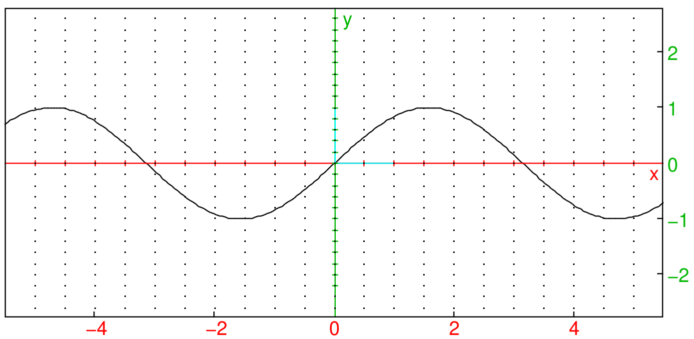

FIGURE 2 – cos

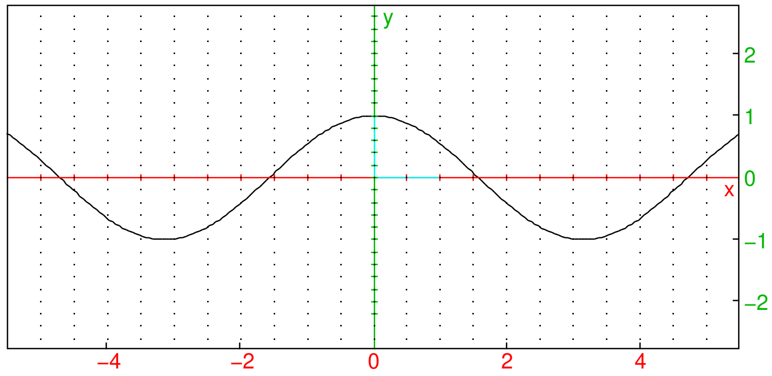

FIGURE 3 – tan