Chapitre 10
Fonctions usuelles

I Opérations sur les fonctions

On s'intéresse aux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec des domaines de définition $\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

1. La **somme** de f et g est la fonction $f + g$ définie par :
$$f + g : x \longmapsto f(x) + g(x) \qquad \mathcal{D}_{f+g} = \tag{1}$$
2. Le **produit** de f et g est la fonction $f \cdot g$ définie par :
$$f \cdot g : x \longmapsto f(x) \times g(x) \qquad \mathcal{D}_{f \cdot g} = \tag{2}$$
3. La **composée** de g par f est la fonction $g \circ f$ définie par :
$$g \circ f : x \longmapsto g(f(x)) \qquad \mathcal{D}_{g \circ f} = \tag{3}$$
4. L'**inverse** de f est la fonction $\frac{1}{f}$ définie par :
$$\frac{1}{f} : x \longmapsto \frac{1}{f(x)} \qquad \mathcal{D}_{1/f} = \tag{4}$$
5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le **produit par une constante** est la fonction $\lambda \cdot f$ définie par :
$$\lambda \cdot f : x \longmapsto \lambda \times f(x) \qquad \mathcal{D}_{\lambda \cdot f} = \tag{5}$$
6. Le **quotient** de f par g est la fonction $\frac{f}{g}$ définie par :
$$\frac{f}{g} : x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \mathcal{D}_{f/g} = \tag{6}$$

Remarque 1. Ne pas confondre l'inverse $1/f$ et la réciproque f^{-1}... la notation puissance est parfois ambiguë, mais l'écriture $x \mapsto \Big(f(x)\Big)^{-1}$ ne l'est pas.

Rappelons aussi l'opération de **restriction** : si $A \subset \mathbb{R}$ on note $f_{|A}$ la fonction f restreinte à la partie A.

II Quelques propriétés des fonctions

On s'intéresse aux propriétés des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec un domaine de définition $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$.

II.1 Croissance

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

1. f est **croissante sur** I si :
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y) \tag{7}$$
2. f est **décroissante sur** I si :
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y) \tag{8}$$
3. f est **strictement croissante sur** I si :
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y) \tag{9}$$
4. f est **strictement décroissante sur** I si :
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y) \tag{10}$$
5. f est **monotone sur** I si : elle est croissante ou décroissante.
6. f est **strictement monotone sur** I si : elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Petites questions de logique

1. Que se passe-t-il si on mélange des inégalités strictes et larges dans les définitions ci-dessus ?
2. Quelles sont les négations de ces propriétés ?
3. Pourquoi ces propriétés ont moins de sens si I n'est pas un intervalle ?

II.2 Majorations

Soit une partie $A \subset \mathcal{D}_f$.

— f est **majorée** sur A si :
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, \quad f(x) \leqslant M \tag{11}$$

— f est **minorée** sur A si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, \quad m \leqslant f(x) \tag{12}$$

— f est **bornée** sur A si : elle est majorée et minorée.

Remarque 2. Cela est équivalent à dire que $\{f(x) \mid x \in A\}$ est majoré (resp. minoré, borné).

II.3 Extrema

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soit une partie $A \subset \mathcal{D}_f$.

— f admet un **maximum** en $a \in A$ si :

$$\forall x \in A, \quad f(x) \leqslant f(a) \tag{13}$$

— f admet un **minimum** en $a \in A$ si :

$$\forall x \in A, \quad f(x) \geqslant f(a) \tag{14}$$

— f admet une **borne sup** (resp. **borne inf**) sur A si : $\{f(x) \mid x \in A\}$ admet une borne sup (resp. borne inf).

Remarque 3. Ne **surtout pas confondre** le point où f admet un maximum (ici a) et la valeur en ce maximum (ici $f(a)$).

II.4 Lien avec les opérations

Diverses propriétés découlent directement de ces opérations et des propriétés déjà vues sur la relation d'ordre.
Pour la croissance :

Proposition 1.
1. *Si f, g sont croissantes (reps. décroissantes) alors $f + g$ est croissante (resp. décroissante).*
2. *Si f, g sont croissantes et positives alors $f \cdot g$ est croissante et positive.*
3. *Si $\lambda > 0$ et si f est croissante alors $\lambda \cdot f$ est croissante ; mais si $\lambda < 0$ alors $\lambda \cdot f$ est décroissante.*
4. *Si f est croissante et strictement positive alors $\frac{1}{f}$ est décroissante.*

Ainsi que pour les majorations :

Proposition 2.
1. *Si f, g sont bornées alors $f + g$ et $f \cdot g$ sont bornées.*
2. *Si f est bornée et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda \cdot f$ est bornée.*
3. *f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.*

Et $\frac{1}{f}$, et $\frac{f}{g}$?

II.5 Parité

1. f est **paire** si :
$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad -x \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x) \tag{15}$$
2. f est **impaire** si :
$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad -x \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x) \tag{16}$$
3. Exemples de fonctions paires :
4. Exemples de fonctions impaires :

II.6 Périodicité

Soit $T \in \mathbb{R}^*$.

1. f est **périodique** de **période** T (ou : T-périodique) si :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x + T \in \mathcal{D}_f) \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x) \tag{17}$$
2. Exemples de fonctions périodiques :

Proposition 3. *f est T-périodique si et seulement si :*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad x + kT \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad f(x+kT) = f(x) \tag{18}$$

Remarque 4. Une fonction peut avoir plusieurs périodes, mais en général elle a une **plus petite période** $T > 0$. En effet :

Remarque 5. Il arrive que f à soit à la fois périodique et paire ; ou périodique et impaire. Dans ce cas :

II.7 Lien avec l'application réciproque

On admet que si I, J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et si f est bijective de I sur J alors f est soit strictement croissante soit strictement décroissante.

Proposition 4. *Supposons que $f : I \to J$ est bijective, de réciproque $f^{-1} : J \to I$.*
1. *Si f est strictement croissante, alors f^{-1} est strictement croissante.*
2. *Si f est strictement décroissante, alors f^{-1} est strictement décroissante.*
3. *Si f est impaire, alors f^{-1} est impaire.*

Petites questions de logique Et si f est paire ? Périodique ?
Exemples :