Chapitre 15
Limites de suites

V Quelques cas d'études de suites

V.1 Sommes

Contexte : on a une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on étudie la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$.
2. Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k \geqslant 0$ alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Dans ce cas, par le théorème de convergence monotone, alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie ou $+\infty$.
   — Si on peut montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie. C'est le cas notamment si on peut trouver une suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant v_k$ et pour laquelle on sait que $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $M \in \mathbb{R}$: *En effet*, alors
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant M \tag{1}$$
   est aussi majorée, et converge vers une limite $\ell \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant M$.
   — Au contraire, si on peut trouver une suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_k \leqslant u_k$ et pour laquelle on sait que $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers $+\infty$ car
   $$\sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k = S_n \tag{2}$$
   et cette fois c'est le théorème du gros gendarme qui permet de conclure.
3. Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ, un passage à la limite dans $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ montre que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell - \ell = 0$. Réciproque fausse. Donc si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non plus.

Dans certains cas le terme noté ici u_k dépend aussi de n… Ces méthodes ne s'appliquent pas directement mais on peut s'en inspirer.

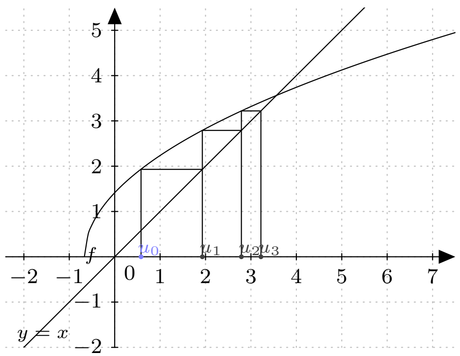
V.2 Suites implicites

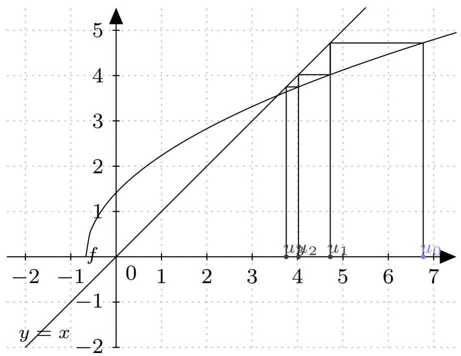
Contexte : on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ une fonction réelle f_n et l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution (pour $x \in \mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser). On appelle x_n cette unique solution et cela définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :

1. Il faut d'abord vérifier que tout est bien défini. Avoir le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_n}$ de f_n.
2. Il faut avoir un tableau de variations de f_n et montrer, notamment à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f_n(x) = 0$ a bien une unique solution dans l'intervalle I donné. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie et vérifie la relation $f_n(x_n) = 0$.
3. Pour étudier la croissante de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il peut être fructueux de calculer $f_{n+1}(x_n)$ ou bien $f_n(x_{n+1})$. À l'aide du tableau de variations, cela permet de savoir où se situe x_n par rapport à x_{n+1}.
4. Quand le sens de variation est connu, et sachant que $x_n \in I$, souvent le théorème de convergence monotone permet d'établir l'existence d'une limite.
5. Éventuellement, calculer des valeurs particulières $f_n(x)$ pour certains x permet, toujours à l'aide du tableau de variations, d'encadrer x_n plus finement.
6. Un passage à la limite pour $n \to +\infty$ dans l'expression $f_n(x_n) = 0$ peut être fructueux pour déterminer la limite.

V.3 Suites de récurrence

Contexte : on a une fonction réelle f et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.





1. Il est important d'avoir sous les yeux le **tableau de variations de** f ainsi que **le tableau de signe de** $f(x) - x$ et de s'aider d'un graphique en escalier.

2. Les valeurs $x \in \mathbb{R}$ telles que $f(x) = x$ s'appellent les **points fixes** de f.
   Ce sont les valeurs x telle que si $u_0 = x$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x$:
   En effet $u_1 = f(u_0) = f(x) = x$, puis $u_2 = f(u_1) = f(x) = x$, ...
3. Il n'est pas toujours évident que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera bien définie, même si $f(u_0)$ est bien défini. En général il faut se placer, à l'intérieur du domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f, sur un **intervalle stable** : un intervalle I tel que si $x \in I$ alors $f(x) \in I$.
   Dans ce cas : si $u_0 \in I$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$:
   En effet $u_1 = f(u_0) = f(x) \in I$ si $x \in I$, puis $u_2 = f(u_1) \in I$ si $u_1 \in I$, ...
4. — Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans un intervalle I sur lequel $f(x) \leqslant x$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :
   $f(u_n) \leqslant u_n$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$.
   — Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans un intervalle I sur lequel $f(x) \geqslant x$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :
   $f(u_n) \geqslant u_n$ donc $u_{n+1} \geqslant u_n$.
5. Alternativement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans un intervalle I sur lequel f est croissante alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone : croissante si $u_1 \geqslant u_0$ et décroissante si $u_1 \leqslant u_0$:
   En effet si pour un rang n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ alors appliquer f des deux côtés donne $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$, et de même si on avait $u_{n+1} \geqslant u_n$ alors appliquer f donne $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. Par récurrence, on démontre donc que si $u_1 \geqslant u_0$ la suite est croissante, alors que si $u_1 \leqslant u_0$ elle est décroissante. Cela se détermine à l'aide du tableau de signe de $f(x) - x$ et de u_0.
6. Le théorème de convergence monotone, en sachant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans un certain intervalle I, permet alors souvent de conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
7. Un passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ montre que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et si f est continue en ℓ, alors ℓ vérifie nécessairement $\ell = f(\ell)$: la limite ne peut être qu'un point fixe.
8. Sur un intervalle où la fonction f est décroissante, il se peut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alterne de part et d'autre d'un point fixe. Dans ce cas il faut étudier séparément les suites de rangs pairs et impairs $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Chacune des deux vérifie la relation de récurrence donnée par $f \circ f$, car $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}))$.
   On est ramené aux études précédentes pour $f \circ f$.
   Remarque : les points fixes pour f sont encore fixes pour $f \circ f$ (si $f(x) = x$ alors $f(f(x)) = f(x) = x$), mais $f \circ f$ peut avoir d'autres points fixes.
   On utilise alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si les deux suites $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers le même ℓ.