Chapitre 18
Limites de fonctions

I Plein de définitions

But : étant donnée une fonction réelle f, définir $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

I.1 Limites

Cas des limites en un réel fini Soit $a \in \mathbb{R}$, on suppose que f est définie au moins sur un intervalle ouvert I contenant a, ou sur $I \setminus \{a\}$. Alors :

— Si $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ a pour limite ℓ quand $x \to a$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \quad \Big(|x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\Big) \tag{1}$$

— Si $\ell = +\infty$, on dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ quand $x \to a$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \quad \Big(|x-a| < \alpha \Longrightarrow f(x) > A\Big) \tag{2}$$

— Si $\ell = -\infty$, on dit que $f(x)$ a pour limite $-\infty$ quand $x \to a$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \quad \Big(|x-a| < \alpha \Longrightarrow f(x) < A\Big) \tag{3}$$

Cas des limites en $+\infty$ On suppose que f est définie au moins sur un intervalle du type $I =]m, +\infty[$ ($m \in \mathbb{R}$). Alors :

— Si $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ a pour limite ℓ quand $x \to +\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \quad \Big(x > B \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\Big) \tag{4}$$

— Si $\ell = +\infty$, on dit que $f(x)$ a pour limite $+\infty$ quand $x \to +\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B >\in \mathbb{R},\ \forall x \in I \quad \Big(x > B \Longrightarrow f(x) > A\Big) \tag{5}$$

— Si $\ell = -\infty$, on dit que $f(x)$ a pour limite $-\infty$ quand $x \to +\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \quad \Big(x > B \Longrightarrow f(x) < A\Big) \tag{6}$$

Cas des limites en $-\infty$ On suppose cette fois que f est définie au moins sur un intervalle du type $I =]-\infty, m[$ ($m \in \mathbb{R}$). On obtient la définition de limite de f en $-\infty$ en remplaçant dans les définitions précédentes (4), (5) et (6) la condition « $x > B \Rightarrow$ » par « $x < B \Rightarrow$ ».

I.2 Quelques remarques

Cela fait beaucoup de définitions, mais on peut réduire :

Proposition 1. *Pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f(x)$ tend vers ℓ quand $x \to a$,

(ii) $f(x) - \ell$ tend vers 0 quand $x \to a$,

(iii) $|f(x) - \ell|$ tend vers 0 quand $x \to a$,

ainsi que : $f(x) \to -\infty$ quand $x \to a \iff -f(x) \to +\infty$ quand $x \to a$.

Proposition 2. *De même on a les propriétés de type* « changement de variable » *:*
Pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$: $f(x) \to \ell$ quand $x \to -\infty \iff f(-y) \to \ell$ quand $y \to +\infty$,
et pour $a \in \mathbb{R}$: $f(x) \to \ell$ quand $x \to a \iff f(a+h) \to \ell$ quand $h \to 0$.

I.3 Limites à droite et à gauche

Limites à droite Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est définie au moins sur un intervalle ouvert du type $I =]a, b[$ avec $a < b$.

— Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand $x \to a$ par la droite si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \quad \Big(a < x < a + \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\Big) \tag{7}$$

On note cela $\lim_{x\to a^+} = \ell$, ou bien $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$

— De même, on obtient les définitions de $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$ en remplaçant respectivement dans (2) et dans (3) la condition « $|x - a| < \alpha \Rightarrow$ » par « $a < x < a + \alpha \Rightarrow$ ».

Limite à gauche Si on suppose que f est définie au moins sur un intervalle ouvert du type $I =]a, b[$ obtient pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ la définition de $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = \ell$ en remplaçant dans (1), (2) et (3) la condition « $|x - b| < \alpha \Rightarrow$ » par « $b - \alpha < x < b \Rightarrow$ ».

Limite par au-dessus ou en-dessous Si cette fois $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on obtient la définition de $\lim_{x\to a} f(x) = \ell^+$ en remplaçant les conclusions « $\Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$ » par « $\Rightarrow \ell < f(x) < \ell+\varepsilon$ ».
Et on obtient aussi les définitions de $\lim_{x\to a} f(x) = \ell^-$ en remplaçant les conclusions « $\Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$ » par « $\Rightarrow \ell-\varepsilon < f(x) < \ell$ ».

I.4 Unicité de la limite

Remarque 1. Comme conséquence de la définition, si $a \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$, et si f est définie en a alors soit f n'a pas de limite en a, soit f a une limite mais qui ne peut qu'être $f(a)$.

Théorème 3. *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Si à la fois $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} f(x) = \ell'$ alors $\ell = \ell'$.*

Théorème 4. *Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f est définie au moins un intervalle ouvert I contenant a, ou sur $I \setminus \{a\}$. Alors $f(x)$ a pour limite ℓ quand $x \to a$ si et seulement si f a des limites à droite et à gauche en a et ces limites sont égales.*

I.5 Un théorème bien utile

Théorème 5. *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $f(x)$ tend vers ℓ quand $x \to a$ si et seulement si, **pour toute** suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a, alors $f(u_n)$ tend vers ℓ pour $n \to +\infty$.*

I.6 * Voisinages

Définissons, pour $\ell \in \mathbb{R}$, un « voisinage de ℓ » comme une partie de $\mathbb{R}$ du type $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, pour un certain $\varepsilon > 0$. Définissons aussi un « voisinage de $+\infty$ » comme une partie de $\mathbb{R}$ du type $]A, +\infty[$ (où $A \in \mathbb{R}$) et un « voisinage de $-\infty$ » comme une partie de $\mathbb{R}$ du type $]-\infty, A[$. Il y a aussi des notions de voisinage à gauche et à droite... Alors la définition de $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ s'écrit dans tous les cas ($a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$) :

$$\begin{aligned}&\text{Pour tout voisinage } V \text{ de } \ell,\\ &\qquad\text{Il existe un voisinage } U \text{ de } a,\\ &\qquad\qquad\text{tel que : } \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad \Big(x \in U \Longrightarrow f(x) \in V\Big)\end{aligned} \tag{8}$$

C'est le début de la topologie...

II Limites et comparaisons

Théorème 6 (Passage des inégalités)**.** *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient deux fonctions f, g ayant des limites en a, soit $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$, $\ell' = \lim_{x\to a} g(x)$. Si pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\ell \leqslant \ell'$*

Théorème 7 (Gendarmes)**.** *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient trois fonctions f, g, h telles que pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Si f et g ont des limites en a qui sont égales, posons $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors g a une limite en a et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$.*

Théorème 8 (Gros gendarme)**.** *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient deux fonctions f, g telles que pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$.*

Théorème 9 (Limite monotone)**.** *Soit une fonction f définie et croissante sur au moins $]a, b[$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors en b :*

(i) Ou bien f est majorée, et si $M = \operatorname{Sup}_{x\in]a,b[} f(x)$ alors $\lim_{x\to b^-} f(x) = M$,

(ii) Ou bien f n'est pas majorée, et alors $\lim_{x\to b^-} = +\infty$

De même en a :

(i) Ou bien f est minorée, et si $m = \operatorname{Inf}_{x\in]a,b[} f(x)$ alors $\lim_{x\to a^+} f(x) = m$,

(ii) Ou bien f n'est pas minorée, et alors $\lim_{x\to a^+} = -\infty$

Dans le cas décroissant : en b, f est soit minorée soit tend vers $-\infty$; et en a, f est soit majorée soit tend vers $+\infty$.

Annexe : quelques équivalents et limites usuelles

Pour tout $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \tag{9}$$

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > \beta \\ 0 & \text{si } \alpha < \beta \end{cases} \tag{10}$$

Les équivalents :

$$\exp(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \tag{11}$$

$$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \qquad \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \tag{12}$$

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2} \qquad \frac{1}{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \tag{13}$$