DM 1 Mathématiques
Correction

Problème 1

1.
   - $\boxed{\mathbb{N} \text{ ne vérifie pas (iii)}}$: on a par exemple $1 \in \mathbb{N}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$.
   - $\boxed{\mathbb{Z} \text{ est bien un sous-groupe de } \mathbb{R}}$, il contient 0, la somme de deux nombres entiers est bien un nombre entier, et l'opposé aussi puisqu'on considère tous les nombres entiers relatifs.
   - $\boxed{\mathbb{Q} \text{ est aussi bien un sous-groupe de } \mathbb{R}}$, pour les même raisons.
   - $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{R}$ car $\boxed{\text{il ne vérifie pas (i)}}$, par définition il ne contient pas 0.
   - $[-1, 1]$ vérifie bien (i) et (iii), $\boxed{\text{mais pas (ii)}}$, par exemple il contient 1 mais pas $1 + 1$. Ce n'est donc pas un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
2. Vérifions les trois propriétés pour l'ensemble des entiers pairs :
   - (i) 0 est bien un nombre pair, c'est 2×0.
   - (ii) Soient x et y deux nombres pairs, il faut montrer que $x + y$ est encore pair.
     Par définition il existe un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2n$, et un $m \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 2m$. On a alors $x + y = 2n + 2m = 2(n + m)$, avec $n + m \in \mathbb{Z}$, et ceci montre que $x + y$ est pair.
   - (iii) Soit x un nombre pair, il faut montrer que $-x$ est pair.
     Par définition il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2n$. On a alors $-x = -2n = 2 \times (-n)$, avec $-n \in \mathbb{Z}$, et ceci montre que $-x$ est pair.

   En conclusion $\boxed{\text{l'ensemble des entiers pairs est un sous-groupe de } \mathbb{R}}$.
3. Vérifions les trois propriétés pour l'ensemble E :
   - (i) $0 \in E$ car on peut écrire $0 = \frac{0}{2} + \frac{0}{3}$.
   - (ii) Soient x et y deux éléments de E. Il existe alors $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$, et il existe (d'autres !) $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que $y = \frac{c}{2} + \frac{d}{3}$. On a alors $x + y = \frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{3}$, avec $a + c \in \mathbb{Z}$ et $d + d \in \mathbb{Z}$, ce qui démontre que $x + y \in E$.
   - (iii) Soit $x \in E$. Il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$. On a alors $-x = \frac{-a}{2} + \frac{-b}{3}$, avec $-a \in \mathbb{Z}$ et $-b \in \mathbb{Z}$, ce qui montre que $-x \in E$.

   En conclusion $\boxed{E \text{ est bien un sous-groupe de } \mathbb{R}}$.

   Remarque : on peut remarquer aussi que $E = \left\{ \frac{c}{6} \,\middle|\, c \in \mathbb{Z} \right\}$ (en le démontrant !) et cela rend la preuve très similaire à celle pour les entiers pairs.
4. (a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $nx \in A$ »
   - Pour $n = 0$, $nx = 0$. La propriété $\mathcal{P}(0)$ signifie simplement $0 \in A$, ce qui est la condition (i).
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$, on veut montrer que $(n+1)x \in A$. Mais $(n+1)x = nx + x$, dans cette somme $nx \in A$ par l'hypothèse de récurrence, et $x \in A$ aussi, donc par la condition (ii) on déduit $nx + x \in A$. Ceci démontre $\mathcal{P}(n + 1)$.

   En conclusion $\boxed{\text{on a bien montré } \forall n \in \mathbb{N},\ nx \in A}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{Z}$, on veut montrer que $nx \in A$.
   - Si $n \geqslant 0$, alors $n \in \mathbb{N}$, et donc c'est ce qu'on vient de démontrer avant.
   - Si $n \leqslant 0$, alors $-n \in \mathbb{N}$. On peut donc appliquer la propriété précédente et en déduire que $-nx \in A$. Mais alors $x = -(-nx)$ et donc par la condition (iii) on déduit $x \in A$.

   En conclusion $\boxed{\text{on a bien dans tous les cas } \forall n \in \mathbb{Z},\ nx \in A}$.
5. (a) La négation est $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ A \cap]0, \varepsilon[\neq \emptyset}$.

   Remarque : $(*)$ signifie qu'il existe un certain $\varepsilon > 0$ tel qu'il n'y ait *aucun* élément x avec à la fois $x \in A$ et $0 < x < \varepsilon$ (il y a un « trou » dans A), la négation signifie donc que quelque soit $\varepsilon > 0$ *il y a bien* des éléments x tels que $x \in A$ et $0 < x < \varepsilon$ (A contient des éléments aussi proche de 0 qu'on le souhaite). Il n'aurait pas de sens de remplacer l'intersection par l'union, ou de changer le $]0, \varepsilon[$, ou autre.

(b) (faire un dessin) Montrons que $\mathbb{Z}$ vérifie la condition $(*)$: posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Montrons qu'alors $\mathbb{Z} \cap]0, \varepsilon[= \emptyset$. La démonstration est par l'absurde. Supposons qu'il existe un élément $x \in \mathbb{Z} \cap]0, \varepsilon[$. Cela signifie que x est entier et que $0 < x < \frac{1}{2}$. Petit problème… C'est donc que cette intersection est vide, et donc que $\boxed{\mathbb{Z} \text{ vérifie bien la condition } (*)}$.

À l'inverse, montrons que $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas la condition $(*)$. Soit $\varepsilon > 0$, il s'agit de montrer $\mathbb{Q} \cap]0, \varepsilon[\neq \emptyset$, c'est-à-dire de trouver (au moins un) élément qui est rationnel et qui est dans $]0, \varepsilon[$. On peut alors penser à le chercher sous forme $x = \frac{1}{n}$, pour un entier $n > 0$ tel que $n > \varepsilon$: on a alors $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. $\boxed{\text{Posant } x = \frac{1}{n} \text{ on a bien } x \in \mathbb{Q} \cap]0, \varepsilon[}$.

(c) Soit $a > 0$, posons $A = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$, montrons d'abord qu'il vérifie bien les trois conditions.

- (i) On a bien $0 \in A$ car $0 = 0 \times a$.
- (ii) Soient $x \in A$ et $y \in A$. Il existe donc un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = na$, et un $m \in \mathbb{Z}$ tel que $y = ma$. On a alors $x + y = na + ma = (n + m)a$, avec $n + m \in \mathbb{Z}$, et ceci démontre que $x + y \in A$.
- (iii) Soit $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = na$, et alors $-x = (-n)a$ avec $-n \in \mathbb{Z}$. Ceci montre que $-x \in A$.

En conclusion $\boxed{A \text{ est bien un sous-groupe de } \mathbb{R}}$.

Montrons que maintenant A vérifie $(*)$.

Analyse : comme précédemment il s'agit de trouver un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $A \cap]0, \varepsilon[= \emptyset$, c'est-à-dire tel qu'il n'existe pas d'élément $x \in A$ avec $0 < x < \varepsilon$. Mais un tel élément s'écrit $x = na$, avec un $n \in \mathbb{Z}$, et la condition est alors équivalente à $0 < n < \frac{\varepsilon}{a}$. Or, si on choisit ε tel que $\frac{\varepsilon}{a} = \frac{1}{2}$ on aura le même problème que précédemment…

Synthèse : $\boxed{\text{posons } \varepsilon = \frac{a}{2}}$, on a bien $\varepsilon > 0$ car $a > 0$. Alors par les calculs précédents, si on avait un élément $x = na$ tel que $0 < x < \varepsilon$ on aurait alors $0 < n < \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. Donc pour cette valeur de ε, $\boxed{A \cap]0, \varepsilon[= \emptyset}$.

Ceci montre bien que $\boxed{A \text{ vérifie } (*)}$.

(d) Posons $A = \left\{ \frac{k}{2^n} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}$, montrons soigneusement que A est un sous-groupe de $\mathbb{R}$:

- (i) On a bien $0 \in A$ car on peut écrire $0 = \frac{0}{2^0}$ (poser $k = 0$, $n = 0$).
- (ii) Soient $x, y \in A$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{k}{2^n}$, et il existe $\ell \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ tels que $y = \frac{\ell}{2^m}$. On a alors
$$x + y = \frac{k \times 2^m + \ell \times 2^n}{2^n \times 2^m} = \frac{k 2^m + \ell 2^n}{2^{n+m}} \tag{1}$$
ce qui est bien sous la forme voulue, avec $k2^m + \ell 2^n \in \mathbb{Z}$ et $n + m \in \mathbb{N}$.
- (iii) Soit $x \in A$, par définition il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{k}{2^n}$. On a alors $-x = \frac{-k}{2^n}$, avec $-k \in \mathbb{Z}$, donc on a bien $-x \in A$.

Donc on a bien montré que $\boxed{A \text{ est un sous-groupe de } \mathbb{R}}$.

Montrons maintenant que A ne vérifie pas $(*)$. Soit $\varepsilon > 0$, il faut montrer qu'il existe au moins un élément $x \in A$ et avec $0 < x < \varepsilon$.

Analyse : on peut le chercher sous forme $x = \frac{1}{2^n}$, alors

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < 2^n \iff \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n \ln(2) \iff \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} < n \tag{2}$$

Synthèse : $\boxed{\text{on pose } n \text{ un entier qui est strictement plus grand que } \frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}{\ln(2)}}$, puis on pose $\boxed{x = \frac{1}{2^n}}$. Par ces calculs on a bien $x \in A$ et $0 < x < \varepsilon$.

Donc $\boxed{A \text{ ne vérifie pas } (*)}$.

Problème 2

1. En prenant les sommes de deux termes verticaux, on trouve bien toujours $n+1$. Mais il y a n tels termes. La somme totale est donc égale à $n(n+1)$. Mais puisqu'il s'agit de $S^1(n)$ écrite une fois à l'endroit et une fois à l'envers, c'est aussi $2S^1(n)$. On trouve $2S^2(n) = n(n+1)$ soit $\boxed{S^1(n) = \frac{n(n+1)}{2}}$.

2. (a) Analyse : on cherche $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que si on pose $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = x^2$. Supposons qu'on ait un tel quadruplet. Alors on calcule : soit $x \in \mathbb{R}$, partant de $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ et $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ alors

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= \Big(a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d\Big) - \Big(ax^3 + bx^2 + cx + d\Big) && (3)\\ &= \Big(ax^3 + 3ax^2 + 3ax + a + bx^2 + 2bx + b + cx + c + d\Big) - \Big(ax^3 + bx^2 + cx + d\Big) && (4)\\ &= 3ax^2 + (3a + 2b)x + (a + b + c) && (5) \end{aligned}$$

et on veut que ceci soit égal à x^2. On veut donc choisir

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

ce qui donne successivement $a = \frac{1}{3}$, puis $2b = -3a$ donc $2a = -1$ soit $b = -\frac{1}{2}$, et enfin $c = -a - b$ soit $c = \frac{1}{6}$. On voit qu'on n'a pas de condition sur d, qu'on peut choisir quelconque, prenons $d = 0$.

Synthèse : $\boxed{\text{posons } f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x}$. Alors c'est bien une fonction polynôme du degré 3 et par les calculs précédents on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = x^2$.

(b) La somme $(f(2) - f(1)) + (f(3) - f(2)) + (f(4) - f(3)) + \cdots + (f(n+1) - f(n))$ se simplifie en $\boxed{f(n+1) - f(1)}$ d'une part, mais aussi par définition en $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. Cela donne la relation

$$S^2(n) = f(n+1) - f(1) = \left(\frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1)\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) \qquad (7)$$

Dans l'expression de droite, on factorise d'abord par $\frac{n+1}{6}$ pour simplifier le plus possible.

$$\begin{aligned} S^2(n) &= \frac{n+1}{6}\Big(2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1\Big) - \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)}_{0} && (8)\\ &= \frac{n+1}{6}\Big(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1\Big) && (9)\\ &= \frac{n+1}{6}\Big(2n^2 + n\Big) && (10)\\ &= \frac{n+1}{6} \times n \times (2n+1) && (11)\\ &= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} && (12) \end{aligned}$$

C'est bien l'expression voulue.

3. (a) Par le même principe (« *téléscopage* »), on trouve

$$\begin{aligned} & v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n && (13)\\ &= (1^4 - 0^4) + (2^4 - 1^4) + (3^4 - 2^4) + \cdots + ((n+1)^4 - n^4) && (14)\\ &= \boxed{(n+1)^4} && (15) \end{aligned}$$

(b) On démontre dans l'ordre, sachant déjà $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$

$$\begin{aligned} (k+1)^3 &= (k+1)(k+1)^2 && (16)\\ &= (k+1)(k^2 + 2k + 1) && (17)\\ &= k^3 + 2k^2 + k + k^2 + 2k + 1 && (18)\\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 && (19) \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
(k+1)^4 &= (k+1)(k+1)^3 && (20)\\
&= (k+1)(k^3+3k^2+3k+1) && (21)\\
&= k^4+3k^3+3k^2+k+k^3+3k^2+3k+1 && (22)\\
&= k^4+4k^3+6k^2+4k+1 && (23)
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{v_k = 4k^3+6k^2+4k+1}$.

(c) Écrivons les sommes les unes au-dessus des autres

$$\begin{aligned}
v_0 &= 4\times 0^3 + 6\times 0^2 + 4\times 0 + 1\\
v_1 &= 4\times 1^3 + 6\times 1^2 + 4\times 1 + 1\\
v_2 &= 4\times 2^3 + 6\times 2^2 + 4\times 2 + 1\\
&\vdots\\
v_n &= 4\times n^3 + 6\times n^2 + 4\times n + 1
\end{aligned} \qquad (24)$$

Sommant tous ces termes, qu'on peut réordonner, on trouve

$$\begin{aligned}
v_0+\dots+v_n = &\left(4\times 0^3+\dots+4\times n^3\right)\\
&+\left(6\times 0^2+\dots+6\times n^2\right)\\
&+\left(4\times 0+\dots+4\times n\right)\\
&+\left(1+\dots+1\right)\\
= &\left(4\times 0^3+\dots+4\times n^3\right)\\
&+\left(6\times 0^2+\dots+6\times n^2\right)\\
&+\left(4\times 0+\dots+4\times n\right)\\
&+\left(1+\dots+1\right)
\end{aligned} \qquad (25)$$

et on reconnait donc précisément $4S^3(n)+6S^2(n)+4S^1(n)+(n+1)$ (il y a $(n+1)$ termes). Cela donne donc bien $\boxed{4S^3(n)+6S^2(n)+4S^1(n)+n+1=(n+1)^4}$.

Mais dans cette expression les termes $S^2(n)$ et $S^1(n)$ sont connus, et donc on peut le voir comme une équation portant sur $S^3(n)$. On écrit

$$\begin{aligned}
4S^3(n) &= (n+1)^4 - 6S^2(n) - 4S^1(n) - (n+1) && (26)\\
&= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) && (27)\\
&= (n+1)\Big((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\Big) && (28)\\
&= (n+1)\Big((n+1)^3 - n(2n+1) - (2n+1)\Big) && (29)\\
&= (n+1)\Big((n+1)^3 - (n+1)(2n+1)\Big) && (30)\\
&= (n+1)^2\Big((n+1)^2 - (2n+1)\Big) && (31)\\
&= (n+1)^2\Big(n^2+2n+1-2n-1\Big) && (32)\\
&= (n+1)^2\times n^2 && (33)
\end{aligned}$$

(on essaie de travailler autant que possible en factorisant, sans tout développer au départ) et donc cela donne $\boxed{S^3(n)=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$.

4. Posons $w_k = (k+1)^5 - k^5$. Alors d'une part $w_0 + w_1 + \cdots + w_n = (n+1)^5$. D'autre part on calcule

$$\begin{aligned}(k+1)^5 &= (k+1)(k+1)^4 && (34)\\ &= (k+1)\Big(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\Big) && (35)\\ &= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 && (36)\end{aligned}$$

et donc $\boxed{w_k = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1}$.

Écrivant tous les w_k pour toutes les valeurs de k entre 0 et n et sommant, on trouve comme précédemment la relation $\boxed{5S^4(n) + 10S^3(n) + 10S^2(n) + 5S^1(n) + (n+1) = (n+1)^5}$. Ceci est une équation sur $S^4(n)$, en fonction des $S^3(n)$, $S^2(n)$, $S^1(n)$ déjà calculés. Là encore on garde factorisé le plus possible (commençant par le $n+1$ et les fractions), mais au pire on peut aussi tout développer et vérifier que cela coïncide bien avec l'expression proposée :

$$\begin{aligned}5S^4(n) &= (n+1)^5 - 10S^3(n) - 10S^2(n) - 5S^1(n) - (n+1) && (37)\\ &= (n+1)^5 - \frac{5}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) - (n+1) && (38)\\ &= \frac{(n+1)}{6}\Big(6(n+1)^4 - 15n^2(n+1) - 10n(2n+1) - 15n - 6\Big) && (39)\\ &= \frac{(n+1)}{6}\Big(6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 15n^3 - 15n^2 - 20n^2 - 10n - 15n - 6\Big) && (40)\\ &= \frac{(n+1)}{6}\Big(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n\Big) && (41)\\ &= \frac{(n+1)}{6} \times n \times \Big(6n^3 + 9n^2 + n - 1\Big) && (42)\end{aligned}$$

On peut alors vérifier en développant que le terme sous la parenthèse

$$6n^3 + 9n^2 + n - 1 = (2n+1)(3n^2 + 3n - 1) \qquad (43)$$

ce qui donne bien le résultat final $5S^4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{6}$ soit $\boxed{S^4(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$.