Correction
DM 1 Mathématiques

Un DM est l'occasion de prendre son temps pour réfléchir sur un problème entier et de travailler à avoir la meilleure argumentation et rédaction possible. Le sujet est plutôt moins long qu'un DS et donc encore plus, ce qui est traité doit l'être ***soigneusement****.*

Exercice 1

Soit le nombre

$$x = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} \tag{1}$$

Le but est de simplifier l'expression de x, sans calculatrice.

1. Montrer que x est solution de l'équation

$$(E) \quad X^3 = 20 - 6X \tag{2}$$

Correction. D'abord on utilise l'identité remarquable $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, couplé au fait que $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ valable pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$x^3 = (10+6\sqrt{3}) + 3 \times \left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\right)^2 \times \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} + 3 \times \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} \times \left(\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}\right)^2 + (10-6\sqrt{3})$$

puis on utilise les règles de calcul sur les puissances (qu'on peut retrouver facilement) : $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \times b}$ (en effet, des deux côtés, le cube est égal à $a \times b$) et de même $(\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$:

$$x = 20 + 3 \times \sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})^2 \times (10-6\sqrt{3})} + 3 \times \sqrt[3]{(10-6\sqrt{3})^2 \times (10+6\sqrt{3})}$$

Sous les racines, on développe non pas les terme $(10 \pm 6\sqrt{3})^2$ mais $(10+6\sqrt{3}) \times (10-6\sqrt{3})$ qui va donner un nombre entier :

$$(10+6\sqrt{3}) \times (10-6\sqrt{3}) = 10^2 - (6\sqrt{3})^2 = 100 - 108 = -8$$

ainsi

$$x = 20 + 3 \times \sqrt[3]{-8 \times (10+6\sqrt{3})} + 3 \times \sqrt[3]{-8 \times (10-6\sqrt{3})}$$

Mais $-8 = (-2)^3$ donc -2 sort de la racine cubique tel quel :

$$x = 20 + 3 \times (-2) \times \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + 3 \times (-2) \times \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$$

et là on reconnait $x^3 = 20 - 6x$. □

2. Trouver une autre solution « évidente » de (E).

Correction. On essaie dans l'ordre 0, 1, -1, 2, -2, ... on trouve que 2 est solution :

$$8 = 2^3 = 20 - 6 \times 2$$

□

3. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall X \in \mathbb{R}, \quad X^3 + 6X - 20 = (X-a)(X^2 + bX + c) \tag{3}$$

Correction. N'oubliant pas que 2 doit être une solution de (E), si une telle factorisation existe alors soit un morceau est déjà $X-2$ soit le polynôme de degré deux à droite admet $X=2$ comme racine et donc se factorise par $X-2$. Donc dans tous les cas on s'attend à factoriser par $X-2$ et on tente $a=2$. En développant on trouve alors

$$(X-2)(X^2+bX+c) = X^3+bX^2+cX-2X^2-2bX-2c = X^3+(b-2)X^2+(c-2b)X-2c$$

qui est égal à $X^3+6X-20$ dès que

$$\begin{cases} b-2=0 & (L_1) \\ c-2b=6 & (L_2) \\ 2c=20 & (L_3) \end{cases} \tag{4}$$

Alors (L_1) donne $b=2$, (L_3) donne $c=10$, et ceci satisfait bien (L_2). Conclusion : on a bien

$$\forall X\in\mathbb{R},\quad X^3+6X-20=(X-2)(X^2+2X+10)$$

□

4. En déduire une expression plus simple de x.

   Correction. Du coup on en déduit :

$$X^3+6X-20=0 \iff X-2=0 \text{ ou } \underbrace{X^2+2X+10=0}_{(F)}$$

   À droite l'équation (F) est une équation polynomiale du second degré avec $\Delta = 2^2-4\times 10\times 1 = 4-40 = -36 < 0$. Elle a donc des racines complexes conjuguées non réelles. Or le nombre x est soit une solution de $X-2=0$ soit une solution de (F), mais x est réel ! C'est donc qu'en fait

$$x=2$$

   (Tout ça pour ça ? Oui !) □

Exercice 2

Le but est de déterminer la forme exponentielle du nombre complexe

$$z=\frac{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{\sqrt{1+\sin(2\theta)}+i\sqrt{1-\sin(2\theta)}},\quad \theta\in[0,\pi[\tag{5}$$

1. Justifier que z est bien défini.

   Correction. Le problème ne se situe pas dans les racines carrées : comme pour tout nombre x on sait que

$$-1\leqslant \sin(x)\leqslant 1$$

   alors on déduit

$$0\leqslant 1+\sin(2\theta)\leqslant 2$$

   et

$$0\leqslant 1-\sin(2\theta)\leqslant 2$$

   quelque soit $\theta\in\mathbb{R}$. Cependant il peut se situer dans la division : il y a un problème si on a simultanément

$$\begin{cases} \sqrt{1+\sin(2\theta)}=0 \\ \sqrt{1-\sin(2\theta)}=0 \end{cases}$$

   c'est à dire

$$\begin{cases} 1+\sin(2\theta)=0 & (L_1) \\ 1-\sin(2\theta)=0 & (L_2) \end{cases}$$

   Or

$$\begin{aligned} (L_1) &\iff \sin(2\theta)=-1 \\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ 2\theta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{aligned}$$

qui admet dans $[0, \pi[$ l'unique solution $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (c'est $k = 1$ ci-dessus), et

$$\begin{aligned}(L_2) &\iff \sin(2\theta) = 1\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\, 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\, \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi\end{aligned}$$

qui admet dans $[0, \pi[$ l'unique solution $\theta = \frac{\pi}{4}$.
On en déduit donc que ces deux termes ne sont jamais simultanément nuls, et donc le dénominateur de z n'est jamais nul, si on prend bien $\theta \in [0, \pi[$. □

2. Donner la forme exponentielle du numérateur de z.

Correction. Une possibilité est d'utiliser l'angle moitié : en effet le numérateur est égal à

$$1 + e^{i\theta} \tag{6}$$

et donc on considère l'angle moitié entre 0 et θ, qui est $\theta/2$:

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2\cos(\tfrac{\theta}{2})e^{i\theta/2}$$

Ceci est la forme exponentielle à condition que $\cos(\frac{\theta}{2}) > 0$, et c'est bien le cas car $\theta \in [0, \pi[$ donc $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et sur ce domaine $\cos > 0$. □

3. (a) Montrer que $1 + \sin(2\theta) = (\cos(\theta) + \sin(\theta))^2$ et obtenir une formule similaire pour $1 - \sin(2\theta)$.

Correction. Si on part de ce qu'on veut c'est rapide : on développe

$$(\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 = \underbrace{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}_{=1} + \underbrace{2\sin(\theta)\cos(\theta)}_{=\sin(2\theta)}$$

et de même

$$(\cos(\theta) - \sin(\theta))^2 = \underbrace{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}_{=1} - \underbrace{2\sin(\theta)\cos(\theta)}_{=\sin(2\theta)}$$

□

(b) Écrire les expressions $\cos(\theta) + \sin(\theta)$ et $\cos(\theta) - \sin(\theta)$ sous forme $r\cos(\theta + \varphi)$ avec $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Correction. D'abord on développe $r\cos(\theta + \varphi)$ (pour les deux) :

$$r\cos(\theta + \varphi) = r\Big(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)\Big) = (r\cos(\varphi))\cos(\theta) - (r\sin(\varphi))\sin(\theta)$$

Ceci est égal à $\cos(\theta) + \sin(\theta)$ dès que

$$\begin{cases} r\cos(\varphi) = 1 \\ r\sin(\varphi) = -1 \end{cases}$$

d'où on tire $r = \sqrt{2}$ puis $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (standard), et de même ceci est égal à $\cos(\theta) - \sin(\theta)$ dès que

$$\begin{cases} r\cos(\varphi) = 1 \\ r\sin(\varphi) = 1 \end{cases}$$

d'où $r = \sqrt{2}$ et $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
Conclusion : on a montré

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} \cos(\theta) + \sin(\theta) &= \sqrt{2}\cos(\theta - \tfrac{\pi}{4}) \\ \cos(\theta) - \sin(\theta) &= \sqrt{2}\cos(\theta + \tfrac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

□

(c) Résoudre les inéquations $\cos(x - \frac{\pi}{4}) \geqslant 0$ et $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \geqslant 0$ d'inconnue $x \in [0, \pi[$.

Correction. Standard aussi. Pour $x \in [0, \pi[$ alors $x - \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$. Là dessus le cosinus est positif si $x - \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, soit $x \in [0, \frac{3\pi}{4}]$, et est négatif si $x - \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}[$, soit $x \in [\frac{3\pi}{4}, \pi[$.
De même, pour $x \in [0, \pi[$ alors $x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[$. Là dessus le cosinus est positif si $x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, soit $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, et est négatif si $x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}[$, soit $x \in [\frac{\pi}{4}, \pi[$.

□

(d) En déduire la forme exponentielle du dénominateur de z, en distingant éventuellement selon la valeur de $\theta \in [0, \pi[$.

Correction. Résumons d'abord : on a écrit le dénominateur

$$D(\theta) = \sqrt{(\cos(\theta) + \sin(\theta))^2} + i\sqrt{(\cos(\theta) - \sin(\theta))^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\cos(\theta - \tfrac{\pi}{4})\right)^2} + i\sqrt{\left(\sqrt{2}\cos(\theta + \tfrac{\pi}{4})\right)^2}$$

Ce qui se factorise en

$$D(\theta) = \sqrt{2}\left(\sqrt{\cos^2(\theta - \tfrac{\pi}{4})} + i\sqrt{\cos^2(\theta + \tfrac{\pi}{4})}\right)$$

C'est ici qu'il faut être particulièrement soigneux (sinon… †) car le résultat dépend de comment on passe la racine carrée : on a identifié 3 cas dans la question précédente selon la position de $\theta \in [0, \pi[$ par rapport à $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ et donc selon le signe de chacun des deux cos apparaissant.

— Cas 1 : $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Alors $\sqrt{\cos^2(\theta - \frac{\pi}{4})} = +\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$ et $\sqrt{\cos^2(\theta + \frac{\pi}{4})} = +\cos(\theta + \frac{\pi}{4})$. Il reste à faire apparaitre cos en partie réelle et sin en partie imaginaire et au même angle, or

$$\cos(\theta + \tfrac{\pi}{4}) = \cos((\theta - \tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\theta - \tfrac{\pi}{4})$$

et donc

$$\cos(\theta - \tfrac{\pi}{4}) + i\cos(\theta + \tfrac{\pi}{4}) = \cos(\theta - \tfrac{\pi}{4}) - i\sin(\theta - \tfrac{\pi}{4})$$

mais ceci est le *conjugé* de $e^{i(\theta - \pi/4)}$ soit $e^{-i(\theta - \pi/4)}$. A posteriori on aurait pu montrer directement

$$\cos(\theta + \tfrac{\pi}{4}) = \sin(-\theta + \tfrac{\pi}{4})$$

à l'aide de la formule de symétrie $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$. Bref, on est arrivé à

$$\cos(\theta - \tfrac{\pi}{4}) + i\cos(\theta + \tfrac{\pi}{4}) = \cos(-\theta + \tfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\theta + \tfrac{\pi}{4})$$

et on conclut

$$D(\theta) = \sqrt{2}e^{i(-\theta + \pi/4)}$$

— Cas 2 : $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Alors $\sqrt{\cos^2(\theta - \frac{\pi}{4})} = +\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$ et $\sqrt{\cos^2(\theta + \frac{\pi}{4})} = -\cos(\theta + \frac{\pi}{4})$. Alors, en reprenant une partie de l'analyse précédente

$$D(\theta) = \sqrt{2}\Big(\cos(\theta - \tfrac{\pi}{4}) - i\cos(\theta + \tfrac{\pi}{4})\Big) = \sqrt{2}\Big(\cos(\theta - \tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\theta - \tfrac{\pi}{4})\Big)$$

et donc ici on voit directement

$$D(\theta) = \sqrt{2}e^{i(\theta - \pi/4)}$$

— Cas 3 : $\theta \in [\frac{3\pi}{4}, \pi[$. Alors $\sqrt{\cos^2(\theta - \frac{\pi}{4})} = -\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$ et $\sqrt{\cos^2(\theta + \frac{\pi}{4})} = -\cos(\theta + \frac{\pi}{4})$. Alors

$$D(\theta) = \sqrt{2}\Big(-\cos(\theta - \tfrac{\pi}{4}) - i\cos(\theta + \tfrac{\pi}{4})\Big) = \sqrt{2}\Big(-\cos(\theta - \tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\theta - \tfrac{\pi}{4})\Big)$$

Pour faire apparaitre la forme exponentielle il faut transformer le complexe z en $-\bar{z}$ (retourne la partie réelle mais laisse fixe la partie imaginaire), ce qui revient à utiliser la formule de symétrie pour $x \mapsto \pi - x$:

$$-\cos(\theta - \tfrac{\pi}{4}) = \cos(\pi - (\theta - \tfrac{\pi}{4})) = \cos(-\theta + \tfrac{5\pi}{4})$$

et

$$\sin(\theta - \tfrac{\pi}{4}) = \sin(\pi - (\theta - \tfrac{\pi}{4})) = \sin(-\theta + \tfrac{5\pi}{4})$$

donc

$$D(\theta) = \sqrt{2}e^{i(-\theta + 5\pi/4)}$$

□

4. Conclure.

Correction. On a tout ce qu'il faut. Résumons :

— Cas 1 :
$$z = \frac{2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\theta/2}}{\sqrt{2}e^{i(-\theta+\pi/4)}} = \sqrt{2}\cos(\tfrac{\theta}{2})e^{i(\theta/2-(-\theta+\pi/4))} = \sqrt{2}\cos(\tfrac{\theta}{2})e^{i(3\theta/2-\pi/4)}$$

— Cas 2 (les constantes sont les mêmes) :
$$z = \sqrt{2}\cos(\tfrac{\theta}{2})e^{i(\theta/2-(\theta-\pi/4))} = \sqrt{2}\cos(\tfrac{\theta}{2})e^{i(-\theta/2+\pi/4)}$$

— Cas 3 :
$$z = \sqrt{2}\cos(\tfrac{\theta}{2})e^{i(\theta/2-(-\theta+5\pi/4))} = \sqrt{2}\cos(\tfrac{\theta}{2})e^{i(3\theta/2-5\pi/4)}$$

□

Problème

Le but de ce problème est de déterminer une expression de $\cos(\frac{\pi}{5})$ et de $\sin(\frac{\pi}{5})$.

1. En utilisant la forme exponentielle, donner toutes les solutions de l'équation $z^5 = 1$, $z \in \mathbb{C}$. Ces nombres s'appellent les *racines cinquièmes de l'unité*.

   Correction. On cherche les solutions sous forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ (clairement 0 n'est pas solution) et $\theta \in \mathbb{R}$ unique dans $[0, 2\pi[$. Alors
   $$z^5 = 1 \iff r^5 e^{5i\theta} = 1$$
   qui donne d'une part $r^5 = 1$ (donc $r = 1$ puisque c'est un réel > 0) et $\exists k \in \mathbb{Z}$, $5\theta = 2k\pi$ soit $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\theta = \frac{2k\pi}{5}$. On trouve alors 5 solutions exactement :
   $$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{2i\pi/5}, \quad z_2 = e^{4i\pi/5}, \quad z_3 = e^{6i\pi/5}, \quad z_4 = e^{8i\pi/5}$$
   □

2. Écrire ces racines cinquièmes sous forme trigonométrique, en fonction des cos et sin aux angles $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ uniquement.

   Correction. D'abord
   $$z_0 = 1$$
   (rien à dire), et
   $$z_1 = \cos(\tfrac{2\pi}{5}) + i\sin(\tfrac{2\pi}{5})$$
   Pour z_2 on utilise $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$ donc
   $$z_2 = -\cos(\tfrac{\pi}{5}) + i\sin(\tfrac{\pi}{5})$$
   Pour z_3 c'est avec $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$:
   $$z_3 = -\cos(\tfrac{\pi}{5}) - i\sin(\tfrac{\pi}{5})$$
   Enfin pour z_4, $\frac{8\pi}{5} = 2\pi - \frac{2\pi}{5}$ donc
   $$z_4 = \cos(\tfrac{2\pi}{5}) - i\sin(\tfrac{2\pi}{5})$$
   (tout ceci se voit bien sur le cercle trigonométrique) □

3. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale
   $$P : z \mapsto a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0, \quad (a_4, a_3, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^4 \tag{7}$$
   telle que $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^5 - 1 = (z-1)P(z)$.

   Correction. Soit $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^4$, soit $z \in \mathbb{C}$. On développe :
   $$(z-1)(a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0) = a_4z^5 + (a_3 - a_4)z^4 + (a_2 - a_3)z^3 + (a_1 - a_2)z^2 + (a_0 - a_1)z - a_0$$
   Ceci est égal à $z^5 - 1$ dès que
   $$\begin{cases} a_4 = 1 \\ a_3 - a_4 = 0 \\ a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \\ -a_0 = -1 \end{cases}$$
   et donc on trouve tout de suite $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0) = (1, 1, 1, 1, 1)$ soit
   $$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$
   □

4. Déterminer trois nombres $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \frac{P(z)}{z^2} = a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c \tag{8}$$

Correction. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. D'une part

$$\frac{P(z)}{z^2} = z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$$

et d'autre part

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 \times z \times \frac{1}{z} = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$$

donc si on prend $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et qu'on développe

$$a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c = az^2 + bz + (2a + c) + \frac{b}{z} + \frac{a}{z^2}$$

et ceci est égal à $\frac{P(z)}{z^2}$ dès que $a = 1$, $b = 1$ et il reste $2a + c = 1$ soit $c = -1$. Conclusion : on a montré

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1$$

□

5. Résoudre l'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

Correction. C'est l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$. Ici $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$. Les solutions sont donc

$$Z_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad Z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

□

6. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$. On les écrira sous forme algébrique à l'aide de fractions et de racines carrées.

Correction. D'abord, $z = 0$ n'est pas une solution de $P(z) = 0$. Ainsi

$$\frac{P(z)}{z^2} = 0 \iff P(z) = 0$$

et donc par ce qui a été fait avant les solutions sont les $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tels que $z + \frac{1}{z} = Z_1$ ou tels que $z + \frac{1}{z} = Z_2$. Pour la première :

$$z + \frac{1}{z} = Z_1 \iff z^2 - Z_1 z + 1 = 0$$

on a alors $\Delta = (Z_1)^2 - 4 \times 1 = (1 - Z_1) - 4 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 4 = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$ (on simplifie avec $(Z_1)^2 = 1 - Z_1$) et donc on trouve les solutions

$$\frac{Z_1 \pm i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \pm i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

De même pour la deuxième, c'est $z^2 - Z_2 z + 1 = 0$ avec $\Delta = (Z_2)^2 - 4 = (1 - Z_2) - 4 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ et donc les solutions sont

$$\frac{Z_2 \pm i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \pm i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

□

7. Conclure en donnant des expressions de $\cos(\frac{\pi}{5})$ et de $\sin(\frac{\pi}{5})$.

Correction. Les racines cinquièmes de l'unité sont les solutions de $z^5 = 1$ donc sont 1 ou les solutions de $P(z) = 0$ et ces dernières sont les quatre nombres écrits ci-dessus. Il s'agit donc de les identifier aux quatre nombres z_1, z_2, z_3, z_4 et pour cela il suffit de regarder les signes des parties réelles et imaginaires, car ces racines cinquièmes de l'unité sont chacune dans l'un des quatre quarts du cercle trigonométrique. On trouve donc :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\
z_2 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\
z_3 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\
z_4 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}
\end{aligned}$$

On en déduit alors les valeurs

$$\begin{aligned}
\cos(\tfrac{\pi}{5}) &= \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\
\sin(\tfrac{\pi}{5}) &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\
\cos(\tfrac{2\pi}{5}) &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\
\sin(\tfrac{2\pi}{5}) &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}
\end{aligned}$$

(les deux dernières ne sont pas demandées mais apparaissent naturellement au passage). □

8. Représenter les racines cinquièmes de l'unité sur le cercle trigonométrique. De quelle figure géométrique ce sont les sommets ?

   Correction. Ce sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle. Ce qui explique les *liens mystérieux* entre le nombre d'or et les pentagones : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos(\frac{\pi}{5})$. En poussant un peu cela permet aussi de construire le pentagone régulier à la règle et au compas, ou de comprendre comment de telles constructions fonctionnent : avec Pythagore, un triangle rectangle de côtés 1 et $\frac{1}{2}$ a une hypothénuse de longueur $\frac{\sqrt{5}}{2}$; partant de là il n'est pas bien difficile de construire dans le cercle trigonométrique les abscisses $\pm\cos(\frac{\pi}{5})$ et $\pm\cos(\frac{2\pi}{5})$, puis de tracer le pentagone en entier.
   Voir par exemple Wikipédia : construction de pentagone régulier à la règle et au compas □