DM 1 Mathématiques
À rendre pour le mercredi 9 novembre 2022

Un DM est l'occasion de prendre son temps pour réfléchir sur un problème entier et de travailler à avoir la meilleure argumentation et rédaction possible. Le sujet est plutôt moins long qu'un DS et donc encore plus, ce qui est traité doit l'être ***soigneusement****.*

Exercice 1

Soit le nombre

$$x = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} \tag{1}$$

Le but est de simplifier l'expression de x, sans calculatrice.

1. Montrer que x est solution de l'équation
$$(E) \quad X^3 = 20 - 6X \tag{2}$$
2. Trouver une autre solution « évidente » de (E).
3. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\forall X \in \mathbb{R}, \quad X^3 + 6X - 20 = (X - a)(X^2 + bX + c) \tag{3}$$
4. En déduire une expression plus simple de x.

Exercice 2

Le but est de déterminer la forme exponentielle du nombre complexe

$$z = \frac{1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\sqrt{1 + \sin(2\theta)} + i\sqrt{1 - \sin(2\theta)}}, \quad \theta \in [0, \pi[\tag{4}$$

1. Justifier que z est bien défini.
2. Donner la forme exponentielle du numérateur de z.
3. (a) Montrer que $1 + \sin(2\theta) = (\cos(\theta) + \sin(\theta))^2$ et obtenir une formule similaire pour $1 - \sin(2\theta)$.
   (b) Écrire les expressions $\cos(\theta) + \sin(\theta)$ et $\cos(\theta) - \sin(\theta)$ sous forme $r\cos(\theta + \varphi)$ avec $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.
   (c) Résoudre les inéquations $\cos(x - \frac{\pi}{4}) \geqslant 0$ et $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \geqslant 0$ d'inconnue $x \in [0, \pi[$.
   (d) En déduire la forme exponentielle du dénominateur de z, en distingant éventuellement selon la valeur de $\theta \in [0, \pi[$.
4. Conclure.

Problème

Le but de ce problème est de déterminer une expression de $\cos(\frac{\pi}{5})$ et de $\sin(\frac{\pi}{5})$.

1. En utilisant la forme exponentielle, donner toutes les solutions de l'équation $z^5 = 1$, $z \in \mathbb{C}$. Ces nombres s'appellent les *racines cinquièmes de l'unité*.
2. Écrire ces racines cinquièmes sous forme trigonométrique, en fonction des cos et sin aux angles $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ uniquement.
3. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale
$$P : z \mapsto a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad (a_4, a_3, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^4 \tag{5}$$
telle que $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^5 - 1 = (z - 1)P(z)$.
4. Déterminer trois nombres $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \frac{P(z)}{z^2} = a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c \tag{6}$$

5. Résoudre l'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
6. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$. On les écrira sous forme algébrique à l'aide de fractions et de racines carrées.
7. Conclure en donnant des expressions de $\cos(\frac{\pi}{5})$ et de $\sin(\frac{\pi}{5})$.
8. Représenter les racines cinquièmes de l'unité sur le cercle trigonométrique. De quelle figure géométrique ce sont les sommets ?