DM 2 Mathématiques
Correction

Partie 1

1. Dans ce cas w est un nombre réel, on pose $w = c \in \mathbb{R}$. C'est alors dans le cours :
   - Si $c > 0$: deux solutions $\boxed{\left\{-\sqrt{c}, \sqrt{c}\right\}}$.
   - Si $c = 0$: une unique solution $\boxed{\left\{0\right\}}$.
   - Si $c < 0$: deux solutions $\boxed{\left\{-i\sqrt{-c}, i\sqrt{-c}\right\}}$.

2. (a) On pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy \quad \text{et} \quad |z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2 \tag{1}$$

Raisonnons alors proprement par double implication :

- $\Longrightarrow$ Supposons $z^2 = w$. Alors par unicité des parties réelles et imaginaires dans $(x^2-y^2)+2ixy = w$ on trouve $x^2 - y^2 = \Re\mathrm{e}(w)$ et $2xy = \Im\mathrm{m}(w)$. De plus si $z^2 = w$ alors $|z^2| = |w|$, ce qui donne l'équation $x^2 + y^2 = |w|$. On a donc bien trois conditions.
- $\Longleftarrow$ Réciproquement supposons les trois équations $x^2-y^2 = \Re\mathrm{e}(w)$, $2xy = \Im\mathrm{m}(w)$ et $x^2+y^2 = |w|$ de vérifiées. Alors par ces mêmes calculs, seulement les deux premières équations donnent directement $z^2 = w$, sans utiliser la condition sur le module.

En conclusion c'est donc bien une équivalence.

(b) Il s'agit de démontrer que les quantités sous les racines sont bien positives. Or étant donnant un nombre $w \in \mathbb{C}$, posons $w = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on sait que $a^2 \leqslant a^2 + b^2$ donc $\sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$ c'est-à-dire $|a| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$. On a alors

$$a \leqslant |a| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \tag{2}$$

donc $|w| - \Re\mathrm{e}(w) = \sqrt{a^2 + b^2} - a \geqslant 0$. De même $-a \leqslant |a|$ (toujours vrai) donc

$$-a \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \tag{3}$$

et ainsi $|w| + \Re\mathrm{e}(w) = a + \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 0$. Ainsi, les quantités $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(|w| + \Re\mathrm{e}(w))}$ et $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(|w| - \Re\mathrm{e}(w))}$ sont bien définies.

(c) Dans un tel système on isole chacune des variables avec les opérations $L_1 + L_2$ et $L_1 - L_2$. En effet $L_1 + L_2$ donne

$$L_1 + L_2 : 2x^2 = \Re\mathrm{e}(w) + |w| \tag{4}$$

d'où $x^2 = \frac{1}{2}(|w| + \Re\mathrm{e}(w))$, et

$$L_2 - L_1 : 2y^2 = |w| - \Re\mathrm{e}(w) \tag{5}$$

donc $y^2 = \frac{1}{2}(|w| - \Re\mathrm{e}(w))$.

En conclusion le système (S') a quatre solutions puisqu'il y a deux solutions pour x et deux pour y :

$$\boxed{\mathcal{S}' = \left\{(\alpha, \beta), (-\alpha, \beta), (\alpha, -\beta), (-\alpha, -\beta)\right\}} \tag{6}$$

(d) Par définition une solution de (S') est solution de (S) si et seulement si elle vérifie aussi la troisième équation que nous n'avons pas utilisée $2xy = \mathfrak{Im}(w)$. On a donc besoin de calculer $2xy$. Or dans tous les cas

$$\begin{aligned}
2\alpha\beta &= 2\sqrt{\frac{1}{2}(|w| + \mathfrak{Re}(w))}\sqrt{\frac{1}{2}(|w| - \mathfrak{Re}(w))} && (7)\\
&= 2\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (|w| + \mathfrak{Re}(w)) \times (|w| - \mathfrak{Re}(w))} && (8)\\
&= 2\sqrt{\frac{1}{4}(|w|^2 - \mathfrak{Re}(w)^2)} && (9)\\
&= \sqrt{(|w|^2 - \mathfrak{Re}(w)^2)} && (10)
\end{aligned}$$

mais, écrivant encore $w = a + ib$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$) alors $|w|^2 - \mathfrak{Re}(w)^2 = (a^2 + b^2) - a^2 = b^2$ c'est-à-dire $\mathfrak{Im}(w)^2$, et en résumé

$$\boxed{2\alpha\beta = \sqrt{\mathfrak{Im}(w)^2} = |\mathfrak{Im}(w)|} \tag{11}$$

Il y a donc deux cas :

- Si $\mathfrak{Im}(w) > 0$: alors $|\mathfrak{Im}(w)| = \mathfrak{Im}(w)$. Les solutions de (S) sont alors les solutions (x, y) de (S') telles que $xy > 0$, et donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{(\alpha, \beta), (-\alpha, -\beta)\right\}}$.
- Si $\mathfrak{Im}(w) < 0$: alors $|\mathfrak{Im}(w)| = -\mathfrak{Im}(w)$, et les solutions de (S) sont les solutions de (S') telles que $xy < 0$ donc ce sont $\boxed{\mathcal{S} = \left\{(-\alpha, \beta), (\alpha, -\beta)\right\}}$.
- ... Le cas $\mathfrak{Im}(w) = 0$ a déjà été traité à la première question et a été exclu ici.

(e) En résumé, puisque nous cherchons les solutions de $z^2 = w$ sous forme $z = x + iy$:

- Si $\mathfrak{Im}(w) > 0$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\alpha + i\beta, -\alpha - i\beta\right\}}$.
- Si $\mathfrak{Im}(w) < 0$: $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\alpha - i\beta, -\alpha + i\beta\right\}}$.

où les quantités α, β n'ont pas changées et s'expriment en fonction de w uniquement.

3. Pour $w = i$: alors les quantités $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + 0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - 0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On est dans le cas $\mathfrak{Im}(w) > 0$. Donc

$$\boxed{z^2 = i \iff z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{ ou } z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}} \tag{12}$$

On reconnait là $e^{i\pi/4}$ et $-e^{i\pi/4}$, dont le carré donne $e^{i\pi/2} = i$ ...
De même pour $w = -i$ (cas $\mathfrak{Im}(w) < 0$) :

$$\boxed{z^2 = -i \iff z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \text{ ou } z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}} \tag{13}$$

Ce sont en fait $\pm e^{-i\pi/4}$, dont le carré donne $e^{-i\pi/2} = -i$.

4. (a) Cette fois $w = 1 + i$, cas $\mathfrak{Im}(w) > 0$. Alors on trouve $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)}$ et $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)}$ et

$$\boxed{z^2 = 1 + i \iff z = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)} \text{ ou } z = -\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)}} \tag{14}$$

(b) D'autre part, on trouve (très habituel) $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\pi/4}$, donc $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Les racines carrées de $1 + i$ sont alors

$$\boxed{z^2 = 1 + i \iff z = \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\pi/8} \text{ ou } z = -\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\pi/8}} \tag{15}$$

(c) En égalant deux à deux les quantités précédentes (les signes aident à savoir dans quel quart du plan complexe on se trouve) on trouve

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{\sqrt{2}}\Big(\cos(\tfrac{\pi}{8}) + i\sin(\tfrac{\pi}{8})\Big) \tag{16}$$

Séparant les parties réelles et imaginaires, on trouve alors des formules pour $\cos(\frac{\pi}{8})$ et pour $\sin(\frac{\pi}{8})$: on a $\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{8})$ qui donne

$$\begin{aligned}
\cos(\tfrac{\pi}{8}) &= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)}}{\sqrt{\sqrt{2}}} && (17)\\
&= \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}} && (18)\\
&= \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} && (19)\\
&= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} && (20)\\
&= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} && (21)
\end{aligned}$$

et de même $\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{\sqrt{2}}\sin(\frac{\pi}{8})$ donc

$$\sin(\tfrac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)}}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \tag{22}$$

En résumé :

$$\boxed{\cos(\tfrac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\tfrac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} \tag{23}$$

5. Même méthode.
D'une part pour $w = \sqrt{3}+i$ (cas $\mathfrak{Im}(w) > 0$), a $|w| = 2$ et on trouve $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})}$ et $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})}$, donc

$$\boxed{z^2 = \sqrt{3}+i \quad\Longleftrightarrow\quad z = \sqrt{\tfrac{1}{2}(2+\sqrt{3})} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}(2-\sqrt{3})} \text{ ou } z = -\sqrt{\tfrac{1}{2}(2+\sqrt{3})} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}(2-\sqrt{3})}} \tag{24}$$

D'autre part, on a $|w| = 2$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\pi/6}$, donc $\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}$, et les racines carrées sont

$$\boxed{z^2 = \sqrt{3}+i \quad\Longleftrightarrow\quad z = \sqrt{2}e^{i\pi/12} \text{ ou } z = -\sqrt{2}e^{i\pi/12}} \tag{25}$$

Identifiant les deux écritures, alors

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(2+\sqrt{3})} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}(2-\sqrt{3})} = \sqrt{2}e^{i\pi/12} = \sqrt{2}\Big(\cos(\tfrac{\pi}{12}) + i\sin(\tfrac{\pi}{12})\Big) \tag{26}$$

On a donc d'une part $\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{12}) = \sqrt{\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})}$, d'où

$$\begin{aligned}
\cos(\tfrac{\pi}{12}) &= \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})}}{\sqrt{2}} && (27)\\
&= \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})}{2}} && (28)\\
&= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} && (29)\\
&= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} && (30)
\end{aligned}$$

et de même $\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{12}) = \sqrt{\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})}$, d'où

$$\sin(\tfrac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})}{2}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \tag{31}$$

En résumé on a trouvé

$$\boxed{\cos(\tfrac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\tfrac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} \tag{32}$$

Partie 2

6. Supposons z solution de (F), alors en prenant le module des deux côtés de l'équation on obtient $|z^5| = 1$ c'est-à-dire $|z|^5 = 1$. Mais $|z|$ est un nombre réel positif, et pour $r \in [0, +\infty[$ l'équation $r^5 = 1$ admet une unique solution ($r \mapsto r^5$ est strictement croissante) $r = 1$. On en déduit donc ici $|z| = 1$.
7. (a) Pour $z = e^{i\theta}$, alors z est solution de (F) si et seulement si $(e^{i\theta})^5 = 1$ c'est-à-dire $e^{5i\theta} = 1$. Par définition, cela signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $5\theta = 2k\pi$, soit $\boxed{\theta = \frac{2k\pi}{5}}$.

   (b) La forme exponentielle est unique si on choisit l'argument $\theta \in [0, 2\pi[$. On cherche alors toutes les solutions de (F) sous forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, ce qui revient à chercher tous les $k \in \mathbb{Z}$ tels que $\frac{2k\pi}{5} \in [0, 2\pi[$. Cette dernière condition est équivalente à $0 \leqslant \frac{2k\pi}{5} < 2\pi$ soit $0 \leqslant k < 5$. On trouve donc les valeurs possibles pour k : $k \in \left\{0, 1, 2, 3, 4\right\}$, ce qui correspond aux cinq solutions

   $$\boxed{\mathcal{S} = \left\{1, e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{6i\pi/5}, e^{8i\pi/5}\right\}} \tag{33}$$

   Posant $e^{2i\pi/5}$, ces nombres sont aussi les ω^k, pour $k \in \left\{0, 1, 2, 3, 4\right\}$. On trouve donc bien comme ensemble de solutions $\left\{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\right\}$.
8. On trouve, sachant $\omega^5 = 1$

   $$\begin{aligned}(1-\omega)(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4) &= (1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4) - (\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5) && (34)\\ &= (1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4) - (\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+1) && (35)\\ &= 0 && (36)\end{aligned}$$

   Or $\omega \neq 1$ (son module est 1 et son argument est $\frac{2\pi}{5}$, qui n'est pas un multiple de 2π, donc ce n'est pas le nombre réel 1), on peut donc diviser et en déduire $\boxed{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0}$.
9. On a $\omega^4 = e^{8i\pi/5}$ et $\overline{\omega} = e^{-2i\pi/5}$. Mais les arguments de ces deux nombres diffèrent d'un multiple de 2π : $\frac{8i\pi}{5} = -\frac{2i\pi}{5} + 2i\pi$. Donc ils sont égaux : $\boxed{\overline{\omega} = \omega^4}$.

   De même, $\omega^3 = e^{6i\pi/5}$ et $\overline{\omega^2} = e^{-2i\pi/5}$, mais $\frac{6i\pi}{5} = -\frac{2i\pi}{5} + 2i\pi$. Donc $\boxed{\overline{\omega^2} = \omega^3}$.
10. L'équation $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$ donne alors $1+\omega+\omega^2+\overline{\omega^2}+\overline{\omega} = 0$ soit

    $$1 + \left(\omega + \overline{\omega}\right) + \left(\omega^2 + \overline{\omega^2}\right) \tag{37}$$

    qui donne $1+2\cos(\frac{2\pi}{5})+2\cos(\frac{4\pi}{5}) = 0$. Or par la formule de duplication $\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2\cos^2(\frac{2\pi}{5})-1$. Remplaçant, on trouve donc

    $$\boxed{-1 + 2\cos(\tfrac{2\pi}{5}) + 4\cos(\tfrac{4\pi}{5}) = 0} \tag{38}$$

    ainsi $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est bien solution de (G) : $4Z^2 + 2Z - 1 = 0$.
11. (a) On résout l'équation ci-dessus. Ici $\Delta = 2^2 + 4 \times 4 = 4 + 16 = 20$, et donc les solutions sont $Z = \frac{-2\pm\sqrt{20}}{8}$ or $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, donc on trouve $Z = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$.

L'une de ces solutions est positive et l'autre négative, or en raisonnant simplement sur le cercle trigonométrique on sait que $\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$. Conclusion :

$$\boxed{\cos(\tfrac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}} \tag{39}$$

Avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$, et sachant d'avance $\sin(\frac{2\pi}{5}) > 0$, on déduit alors $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \sqrt{1-\cos^2(\frac{2\pi}{5})}$. Or on calcule $\cos^2(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$ puis on trouve

$$\boxed{\sin(\tfrac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} \tag{40}$$

(b) Comme $\omega = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5})$ alors

$$\boxed{\omega = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} \tag{41}$$

12. On applique les méthodes de la partie 1 pour trouver les racines carrées de ω ci-dessus. On cherche $z = x+i$ ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$) tel que $z^2 = \omega$, cas $\mathfrak{Im}(w) > 0$, avec $\omega = 1$, on a les nombres $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}$ et $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}$, on trouve alors $\alpha = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}$ et $\beta = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. En résumé

$$\boxed{\cos(\tfrac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\tfrac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} \tag{42}$$

Pour $\cos(\frac{\pi}{5})$ cette expression est en fait égale à $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, car $(1+\sqrt{5})^2 = 6+2\sqrt{5}$.

13. Sachant $OB = 1$ et $OI = \frac{1}{2}$ alors avec le théorème de Pythagore (le plus classique possible, dans le triangle OBI rectangle en O)

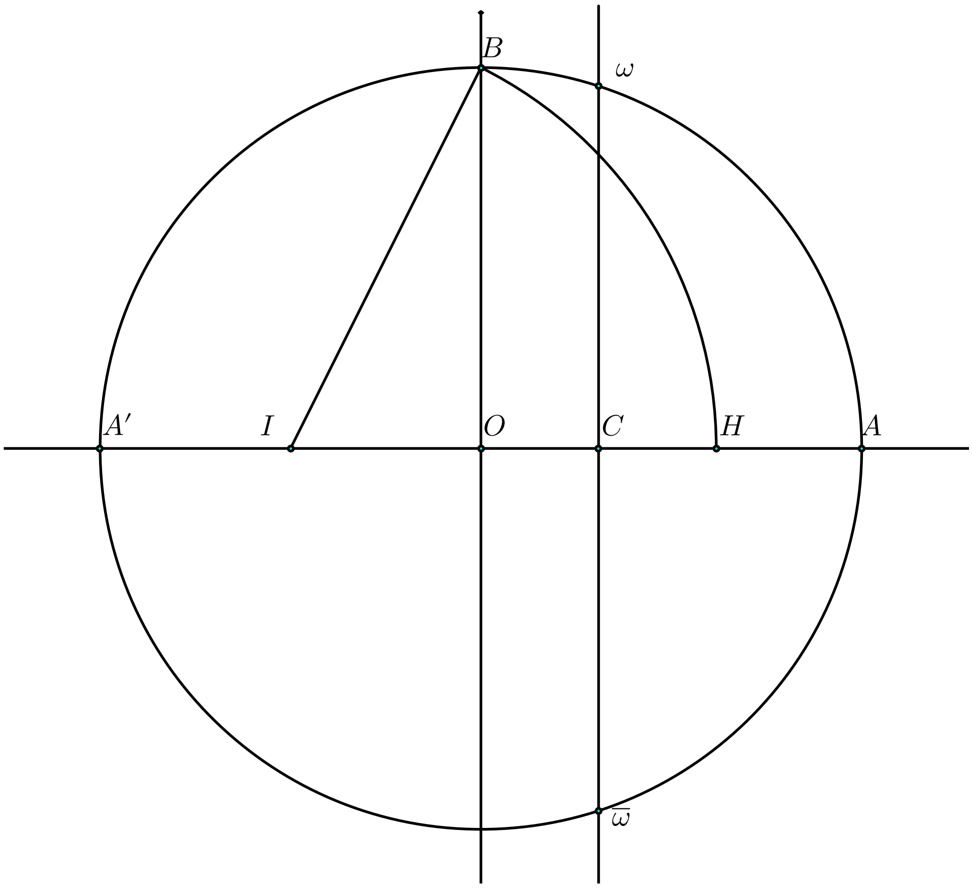
$$BI = \sqrt{1+(\tfrac{1}{2})^2} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}} \tag{43}$$

14. Par construction $IH = IB$, or $OH = IH - IO = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$, et enfin $OC = \frac{1}{2}OH$. On trouve alors

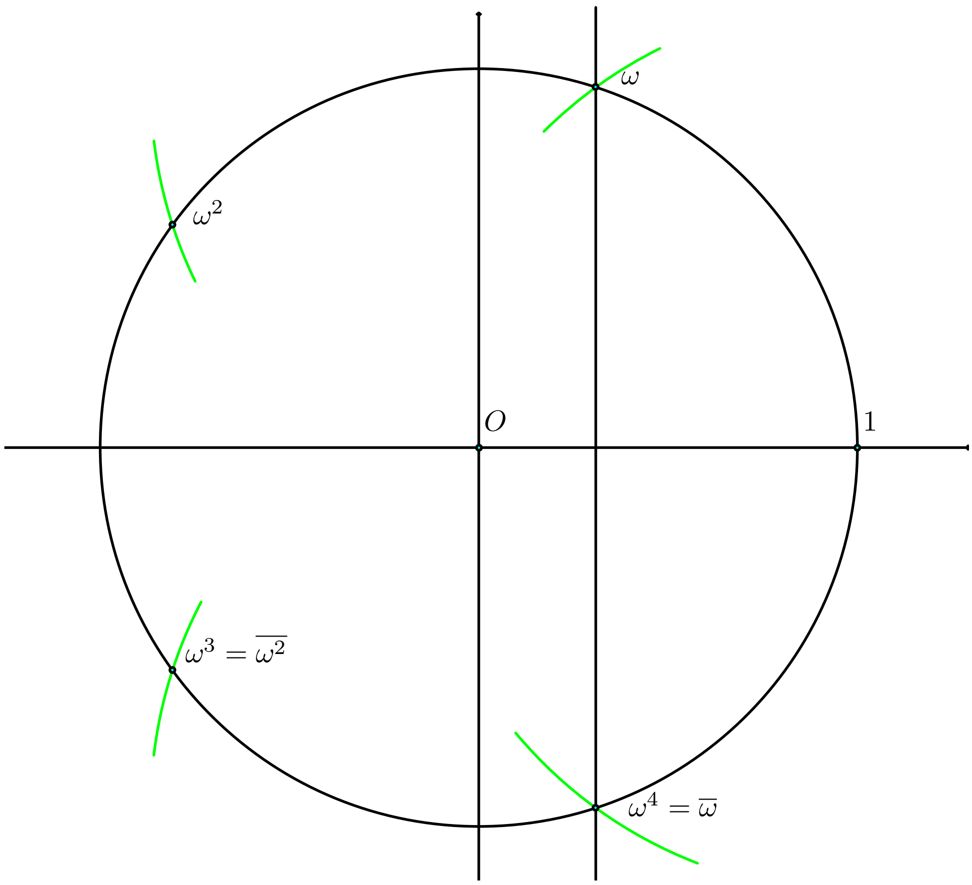
$$\boxed{OC = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}} = \cos(\tfrac{2\pi}{5}) \tag{44}$$

et on reconnait la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ calculée précédemment.

15. La droite verticale passant par C coupe le cercle trigonométrique en deux points, par définition ces deux points ont pour abscisse $\cos(\frac{2\pi}{5})$, et donc leur ordonnée est $\pm\sin(\frac{2\pi}{5})$. Dans le plan complexe, ce sont les deux points d'affixe ω et $\overline{\omega}$.



16. Un pentagone régulier inscrit dans le cercle est formé par 5 points également répartis, avec un angle $\frac{2\pi}{5}$ entre deux points consécutifs ; ce sont aussi les 5 points d'affixe respective 1, ω, ω^2, ω^3, ω^4, et nous avons déjà construit 1, ω, $\overline{\omega} = \omega^4$. Bref, rien qu'en ayant déjà 1 et ω il suffit de prendre son compas pour reporter les points manquants sur le cercle.



Relier les points pour tracer un pentagone complet inscrit dans le cercle.