Correction
DM 2 Mathématiques
À rendre pour le vendredi 13 janvier 2022

On rappelle qu'une **permutation** d'un ensemble fini E est une bijection $\varphi : E \to E$. On appelle **point fixe** de φ un élément $x \in E$ tel que $\varphi(x) = x$. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments qui ont exactement k points fixes. Quitte à numéroter les éléments de E, on peut se ramener au cas où E est égal à $[\![1, n]\!]$. Ainsi :

$$D_{n,k} = \mathrm{Card}\left\{\varphi : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!] \mid \varphi \text{ est bijective et } \mathrm{Card}\{x \in [\![1, n]\!] \mid \varphi(x) = x\} = k\right\}. \tag{1}$$

En particulier, si $k = 0$, les permutations de $[\![1, n]\!]$ sans point fixe sont appelées les **dérangements** de $[\![1, n]\!]$ (aucun élément ne reste à sa place !) et on note $d_n = D_{n,0}$ leur nombre.

I Premiers résultats

1. La liste des permutations de $[\![1, 3]\!]$ est :

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ 3 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 3 & \text{si } x = 3 \end{cases} \tag{2}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } x = 1 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases} \tag{3}$$

En déduire les valeurs de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.

Correction. Le nombre de points fixes pour chacune est : sur la ligne du dessus 3 ($x = 1, 2, 3$), 1 ($x = 1$), 1 ($x = 3$), et sur la ligne du dessous 0, 0, 1 ($x = 2$), Cela signifie donc $D_{3,0} = 2$, $D_{3,1} = 3$, $D_{3,2} = 0$, $D_{3,3} = 1$. ☐

2. En dressant la liste des permutations de $[\![1, 4]\!]$, déterminer les valeurs de $D_{4,k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 4$.

Correction. Il y a 24 permutations, notées comme ceci (une liste des images de chaque nombre $1, \dots, n$) :
— Avec 4 points fixes : $(1, 2, 3, 4)$ (identité), donc $D_{4,4} = 1$.
— Avec 3 points fixes : aucune ! Donc $D_{4,3} = 0$.
— Avec 2 points fixes : $(1, 2, 4, 3)$, $(1, 3, 2, 4)$, $(1, 4, 3, 2)$, $(2, 1, 3, 4)$, $(3, 2, 1, 4)$, $(4, 2, 3, 1)$, donc $D_{4,2} = 6$.
— Avec 1 point fixe : $(1, 3, 4, 2)$, $(1, 4, 2, 3)$, $(2, 3, 1, 4)$, $(2, 4, 3, 1)$, $(3, 1, 2, 4)$, $(3, 2, 4, 1)$, $(4, 1, 3, 2)$, $(4, 2, 1, 3)$. Donc $D_{4,1} = 8$.
— Sans point fixe : on doit en trouver 9 autres, donc $D_{4,0} = 9$. Ce sont $(2, 1, 4, 3)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(2, 4, 1, 3)$, $(3, 1, 4, 2)$, $(3, 4, 1, 2)$, $(3, 4, 2, 1)$, $(4, 1, 2, 3)$, $(4, 3, 1, 2)$, $(4, 3, 2, 1)$.

Une façon méthodique de les lister est de commencer par celles commençant par 1, en listant récursivement les permutations de $\{2, 3, 4\}$, puis celles commençant par 2 en listant ensuite récursivement et dans l'ordre les permutations de $\{1, 3, 4\}$, et ainsi de suite. Les permutations présentées ci-dessus sont dans l'ordre lexicographique. ☐

3. Déterminer les valeurs de $D_{1,0}$, $D_{1,1}$, $D_{2,0}$, $D_{2,1}$ et $D_{2,2}$.

Correction. Il y a une unique permutation de $[\![1, 1]\!]$, qui est $1 \mapsto 1$ et a donc un point fixe. Donc $D_{1,0} = 0$ et $D_{1,1} = 1$. Il y a exactement deux permutations de $[\![1, 2]\!]$: l'identité $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$ qui a 2 points fixes et l'autre (*transposition*) $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$ qui a zéro point fixe. Donc $D_{2,0} = 1$, $D_{2,1} = 0$ et $D_{2,2} = 1$. ☐

4. Que vaut la somme $\sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$ pour tout entier $n \geqslant 1$? Justifiez précisément votre réponse.

Correction. L'ensemble de toutes les permutations de $[\![1, n]\!]$, de cardinal $n!$, admet une partition en les permutations avec k points fixes pour $0 \leqslant k \leqslant n$, puisque pour chaque permutation il existe un et un seul tel k tel qu'elle ait k points fixes. Mais le cardinal de cette partie est par définition $D_{n,k}$. Donc cela donne $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$. ☐

5. Déterminer les valeurs de $D_{n,n-1}$ et $D_{n,n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

   Correction. $D_{n,n}$ est le cardinal des permutations avec n points fixes, mais cela signifie précisément des permutations φ telles que $\forall x \in [\![1,n]\!]$, $\varphi(n) = n$ et donc il n'y en a qu'une seule et c'est l'identité. Donc $D_{n,n} = 1$.
   Pour $D_{n,n-1}$: soit une permutation φ avec $n-1$ points fixes. Il n'y a alors qu'un seul $x \in [\![1,n]\!]$ qui n'est pas fixe. Mais si son image $\varphi(x)$ n'est pas x, alors son image est l'un des $n-1$ autres points fixes, disons y, qui vérifie $\varphi(y) = y$, et de $\varphi(x) = \varphi(y)$ on tire $y = x$ (φ est bijective). Bref cela est impossible et ceci démontre qu'une permutation de $[\![1,n]\!]$ avec au moins $n-1$ points fixes a en fait n points fixes et donc est l'identité. Et donc il n'existe pas de permutation avec exactement $n-1$ points fixes et donc $D_{n,n-1} = 0$. □

II Calcul de $D_{n,n-k}$ en fonction de d_k

6. Dresser la liste des permutations de $[\![1,5]\!]$ ayant exactement 3 points fixes.

   Correction. On voit qu'il suffit de choisir les deux points qui ne sont pas fixes mais qui seront échangés par la permutation : on trouve $(1,2,3,5,4)$, $(1,2,4,3,5)$, $(1,2,5,4,3)$, $(1,3,2,4,5)$, $(1,4,3,2,5)$, $(1,5,3,4,2)$, $(2,1,3,4,5)$, $(3,2,1,4,5)$, $(4,2,3,1,5)$, $(5,2,3,4,1)$. Il y en a 10. □

7. Montrer que $D_{n,n-2} = \binom{n}{2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

   Correction. Une permutation φ à $n-2$ points fixes n'a que deux points qui ne sont pas fixes, disons $x, y \in [\![1,n]\!]$. Alors nécessairement $\varphi(x) = y$ et $\varphi(y) = x$ (et non pas $\varphi(x) = x$ et $\varphi(y) = y$). Réciproquement à partir de la donnée de deux éléments distincts x, y de $[\![1,n]\!]$ on peut bien définir une permutation φ avec uniquement ces deux points qui ne sont pas fixes, en définissant $\varphi(z) = z$ si $z \neq x, y$. Bref, il y a autant d'applications avec $n-2$ points fixes que de choix d'ensemble de deux éléments dans $[\![1,n]\!]$, c'est à dire $\binom{n}{2}$. □

8. Déterminer une expression similaire pour $D_{n,n-3}$ pour tout entier $n \geqslant 3$.

   Correction. De même, une permutation φ avec $n-3$ points fixes n'a que trois points (distincts) qui ne sont pas fixes, disons x, y, z. Mais on vérifie que la seule façon de les permuter entre eux sans créer de nouveaux points fixes est de poser soit $\varphi(x) = y$, $\varphi(y) = z$, $\varphi(z) = x$, soit $\varphi(x) = z$, $\varphi(y) = x$, $\varphi(z) = y$. Donc pour chaque choix de trois éléments de $[\![1,n]\!]$ il y a exactement deux permutations donc ce sont les seuls points non fixes. Bref, cela signifie que $D_{n,n-3} = 2 \times \binom{n}{3}$. □

9. Plus généralement, montrer que pour tout couple d'entiers (n,k) tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ on a :

   $$D_{n,n-k} = \binom{n}{k} d_k. \tag{4}$$

   Correction. C'est exactement la généralisation de ce que nous venons d'expliquer deux fois. Une permutation de $[\![1,n]\!]$ avec $n-k$ points fixes est déterminée uniquement par la donnée des k points non fixes et d'une permutation de ces k points qui ne crée par de nouveaux points fixes, c'est à dire un dérangement de k éléments. En effet à partir d'une telle partie $x_1, \dots, x_k$ et d'un tel dérangement ψ on définira une permutation φ de $[\![1,n]\!]$ par $\varphi(x) = x$ si $x \neq x_1, \dots, x_k$ et $\varphi(x) = \psi(x)$ sinon. □

10. *Application numérique.*

    (a) En déduire les valeurs de $(D_{5,k})_{1 \leqslant k \leqslant 4}$, puis déterminer celles de $D_{5,5}$ et $D_{5,0}$ à l'aide des résultats précédents.

    Correction. Connaissant $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 9$ on applique la formule et on trouve $D_{5,1} = \binom{5}{4} d_4 = 5 \times 9 = 45$, $D_{5,2} = \binom{5}{3} d_3 = 10 \times 2 = 20$, $D_{5,3} = \binom{5}{2} d_2 = 10 \times 1 = 10$ et $D_{5,4} = \binom{5,1}{d}_1 = \times 0 = 0$. De plus on sait que $D_{5,5} = 1$. On trouve alors de la question 4 : $5! = D_{5,0} + 45 + 20 + 10 + 0 + 1$, or $5! = 120$, ce qui donne $D_{5,0} = 120 - 76 = 44$. □

    (b) Construire les sept premières lignes du triangle des valeurs de $D_{n,k}$, c'est-à-dire les valeurs pour les couples d'entiers (n,k) tels que $1 \leqslant n \leqslant 7$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.

Correction. On trouve le résultat suivant :

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
n & & & & & & & & \\
\hline
1 & 0 & 1 & & & & & & \\
2 & 1 & 0 & 1 & & & & & \\
3 & 2 & 3 & 0 & 1 & & & & \\
4 & 9 & 8 & 6 & 0 & 1 & & & \\
5 & 44 & 45 & 20 & 10 & 0 & 1 & & \\
6 & 265 & 264 & 135 & 40 & 15 & 0 & 1 & \\
7 & 1854 & 1855 & 924 & 315 & 70 & 21 & 0 & 1
\end{array}
\tag{5}
$$

Voir aussi les programmes joints qui font cela très bien, notamment `triangle_joli`... □

11. *Informatique.*

(a) Écrire en Python une fonction `factoriel(k)` qui prend en argument un entier $k \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la valeur de $k!$.

Correction. Sans précision, on peut faire une fonction itérative. Sans commentaires.

```python
def factoriel(n):
    p = 1
    for i in range(1, n+1):
        p = p * i
    return p
```

□

(b) Écrire en Python une fonction `binome(k, n)` qui prend en arguments deux entiers $n \geqslant 1$ et $k \in \mathbb{Z}$, et qui renvoie la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Correction. Idem, la version la plus naïve possible (mais pas la plus efficace) :

```python
def binome(k, n):
    return factoriel(n) // (factoriel(k) * factoriel(n-k))
```

L'utilisation de la division en nombre entiers peut faire une différence si on programme vraiment cette fonction : pour peu que les nombres flottants produisent des erreurs d'arrondis on pourrait se retrouver avec des résultats non entiers, qu'on ré-utiliserait dans des fonctions qui ne marchent pas très bien si l'argument n'est pas entier. Bref. □

(c) Dans cette question, on suppose avoir déjà écrit une fonction `d(n)` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$. Écrire une fonction `D(n,k)` qui prend en arguments deux entiers $n \geqslant 1$ et k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, et qui renvoie le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement k points fixes.

Correction. On traduit la formule (4). Celle-ci n'est pas valable pour $k = 0$ (d_0 n'existe de toute façon pas) mais on a déjà vu que $D_{n,n} = 1$. On la ré-écrit $D_{n,k} = \binom{n}{n-k} d_{n-k} = \binom{n}{k} d_{n-k}$ valable si $k \neq n$. On ne s'occupe pas de l'efficacité des formules ni de la condition $0 \leqslant k \leqslant n$ car on suppose que l'utilisateur va correctement utiliser la fonction.

```python
def D(n, k):
    if k == n:
        return 1
    else:
        return binome(k, n) * d(n-k)
```

□

III Une formule de récurrence pour d_n

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geqslant 3$ et on désigne par $\mathscr{D}$ l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$. On exprimera les réponses aux questions 12b et 13b en fonction de n, d_{n-1} et d_{n-2}.

12. (a) Soit $\varphi \in \mathscr{D}$. On pose $\alpha = \varphi(1)$ et on suppose que $\varphi(\alpha) = 1$. Justifier que l'application suivante est bijective et n'a pas de point fixe :

$$
\begin{aligned}
\psi_1 : [\![1, n]\!] \setminus \{1, \alpha\} &\longrightarrow [\![1, n]\!] \setminus \{1, \alpha\} \\
x &\longmapsto \varphi(x).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Correction. La fonction est bien définie car on a restreint φ à $[\![1,n]\!]\setminus\{1,\alpha\}$ et dans l'ensemble d'arrivée on a enlevé les images de 1 et de α. Soit maintenant un élément $y \in [\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\}$. Alors y est l'image par φ d'un unique élément x de $[\![1,n]\!]$. Il s'agit alors de montrer que $x \neq 1$ et $x \neq \alpha$, et alors x sera un unique antécédent de y par ψ_1. Mais si $x = 1$ alors $\varphi(x) = \alpha$ mais $y \neq \alpha$; et si $x = \alpha$ alors $\varphi(x) = 1$ mais $y \neq 1$. De plus si ψ_1 avait un point fixe alors ce serait aussi un point fixe pour φ, mais φ est un dérangement. □

(b) En déduire une expression du cardinal de l'ensemble $\mathscr{D}_1 = \{\varphi \in \mathscr{D} \mid \varphi(\varphi(1)) = 1\}$.

Correction. On a vu qu'une application $\varphi \in \mathscr{D}_1$ détermine un élément $\alpha \in [\![2,n]\!]$ ($\alpha \neq 1$ sinon ce serait un point fixe de φ), et une application ψ_1 qui est un dérangement de $[\![2,n]\!] \setminus \{\alpha\}$. Réciproquement pour n'importe quel choix de tel élément α (avec $n-1$ choix possibles) et de tel dérangement ψ (d'un ensemble à $n-2$ éléments) on peut reconstruire uniquement φ : on définit $\varphi(x) = \psi(x)$ si $x \in [\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\}$ et on définit de plus $\varphi(1) = \alpha$ et $\varphi(\alpha) = 1$. Le nombre de choix impliqués est donc $n-1 \times d_{n-2}$:

$$\mathrm{Card}(\mathscr{D}_1) = (n-1) \times d_{n-2}$$

□

13. (a) Soit $\varphi \in \mathscr{D}$. On pose $\alpha = \varphi(1)$ et on suppose que $\varphi(\alpha) \neq 1$. Justifier que l'application suivante est bijective et n'a pas de point fixe :

$$\begin{aligned} \psi_2 : [\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\} &\longrightarrow [\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \varphi(\alpha) & \text{si } x = 1 \\ \varphi(x) & \text{si } x \neq 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

Correction. L'application est bien définie : si $x \neq 1$ alors $\varphi(x) \neq \alpha$ (φ est injective donc seul $\varphi(1)$ est égal à α) et pour $x = 1$ alors $\psi_2(x) = \varphi(\alpha)$ et $\varphi(\alpha) \neq \alpha$ (sinon α serait un point fixe). Donc elle ne prend pas les valeurs $1, \alpha$. Montrons qu'elle est bijective : soit $y \in [\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}$. Alors y a un unique antécédent $x \in [\![1,n]\!]$ par φ. On raisonne par disjonction de cas *sur* x.

— Si $x \neq 1$ et $x \neq \alpha$: alors $y = \varphi(x) = \psi_2(x)$. Donc x est un antécédent de y par ψ_2. De plus cet antécédent est unique : si $y = \varphi(\alpha)$ alors y a pour antécédent 1 par ψ_2… mais de $y = \varphi(x) = \varphi(\alpha)$ alors $x = \alpha$, ce n'est pas le cas ici.
— Si $x = 1$: alors $y = \alpha$. Mais on a pris $y \neq \alpha$.
— Si $x = \alpha$: alors $y = \varphi(\alpha)$ et donc y admet 1 comme antécédent par ψ_2, et aucun autre car si on en avait un autre $x' \neq 1$ alors y serait égal à $\varphi(x')$ donc $x = x'$.

Il reste à montrer qu'elle n'a pas de point fixe. Or si $x \neq 1$ et $x \neq \alpha$ alors $\psi_2(x) = \varphi(x) \neq x$, et si $x = 1$ alors $\psi_2(x) = \varphi(\alpha) \neq 1$. □

(b) En déduire une expression du cardinal de l'ensemble $\mathscr{D}_2 = \{\varphi \in \mathscr{D} \mid \varphi(\varphi(1)) \neq 1\}$.

Correction. Même raisonnement : une application $\varphi \in \mathscr{D}_2$ détermine uniquement un élément $\alpha \in [\![2,n]\!]$, car c'est $\varphi(1)$, puis un dérangement de $[\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}$. Réciproquement à partir du choix d'un tel élément α ($n-1$ choix) et d'un tel dérangement ψ (d'un ensemble à $n-1$ éléments) on construit φ de la façon suivante : on pose $\varphi(x) = \psi(x)$ si $x \neq 1, \alpha$, on pose $\varphi(1) = \alpha$ et $\varphi(\alpha) = \psi(1)$. De cette façon ψ correspond bien à la construction de l'application ψ_2 associée à φ. Le nombre de choix impliqués est alors $(n-1) \times d_{n-1}$:

$$\mathrm{Card}(\mathscr{D}_2) = (n-1) \times d_{n-1}$$

□

14. Montrer que :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}). \tag{8}$$

Correction. Bien sûr, toute application de $\mathscr{D}$ est soit dans $\mathscr{D}_1$ soit dans $\mathscr{D}_2$ et un seul des cas se produit. Cela correspond donc à une situation d'union disjointe : on a

$$\mathrm{Card}(\mathscr{D}) = \mathrm{Card}(\mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2) = \mathrm{Card}(\mathscr{D}_1) + \mathrm{Card}(\mathscr{D})$$

d'où

$$d_n = (n-1) \times d_{n-2} + (n-1) \times d_{n-1} = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$$

□

15. *Application numérique.* En déduire les valeurs de d_8, d_9 et d_{10}.

Correction. Partant de $d_6 = 265$ et $d_7 = 1854$ du triangle de valeurs de la question 10b, on trouve $d_8 = 7 \times (d_6 + d_7) = 7 \times (265 + 1854) = 14833$, $d_9 = 8 \times (d_7 + d_8) = 8 \times (1854 + 14833) = 133496$ et enfin $d_{10} = 9 \times (d_8 +_9) = 9 \times (14833 + 133496) = 1334961$. □

16. *Informatique.* Écrire une fonction `d(n)` (à l'aide de boucles, non récursive) qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$.

Correction. Il faut s'inspirer de Fibonacci dans lequel on calcule deux termes successifs en même temps. On a besoin de connaitre $d_1 = 0$ et $d_2 = 1$. Il est plus facile d'écrire la récurrence sous forme $d_{n+2} = (n+1)(d_n + d_{n+1})$ valable pour tout $n \geqslant 1$ (attention aux bornes !)

```
def d(n):
    # x représente d_(i) et y représente d_(i+1) en début de boucle
    (x, y) = (0, 1)
    for i in range(1, n):
        (x, y) = (y, (i+1) * (x + y))
    return x
```

□

IV Une formule générale pour d_n et $D_{n,k}$

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geqslant 1$.

17. À l'aide des résultats précédents, montrer que $\ell! - 1 = \sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} d_k$ pour tout entier $\ell \geqslant 1$.

Correction. On utilise la formule (4), combiné au fait que $\ell! = \sum_{k=0}^{\ell} D_{\ell,k}$ (question 4). Mais attention la formule est $D_{\ell,\ell-k} = \binom{\ell}{k} d_k$ valable si $1 \leqslant k \leqslant \ell$, non valable si $k = 0$. Par changement de variable en $\ell - k$ (gardons le même nom de variable) on trouve $\ell! = \sum_{k=0}^{\ell} D_{\ell,\ell-k}$. Donc il faut séparer la somme pour écrire :

$$\ell! = D_{\ell,\ell} + \sum_{k=1}^{\ell} D_{\ell,\ell-k} = \sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} d_k$$

puis il suffit de faire passer à gauche le terme $D_{\ell,\ell}$ qui vaut 1. □

18. On pose $\delta_k = \sum_{\ell=k}^{n} \binom{n}{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^{\ell}$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

(a) Montrer que $\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell-k}$ pour tout couple d'entiers (k, ℓ) tels que $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n$.

Correction. Pour de tels entiers, on écrit :

$$\binom{n}{\ell} \times \binom{\ell}{k} = \frac{n!}{\ell!\,(n-\ell)!} \times \frac{\ell!}{k!\,(\ell-k)!} = \frac{n!}{k! \times (n-\ell)! \times (\ell-k)!}$$

d'une part, et d'autre part

$$\binom{n}{k} \times \binom{n-k}{\ell-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(\ell-k)!\,\big((n-k)-(\ell-k)\big)!} = \frac{n!}{k! \times (\ell-k)! \times (n-\ell)!}$$

et donc ces deux termes sont égaux. □

(b) En déduire que $\delta_k = 0$ si $k \neq n$.

Correction. Première étape : utiliser tout de suite la formule qu'on vient de démontrer.

$$\delta_k = \sum_{\ell=k}^{n} \binom{n}{k} \binom{n-k}{\ell-k} (-1)^{\ell}$$

Là-dessous le terme $\binom{n}{k}$ est une constante (ne varie pas avec ℓ), donc ceci donne

$$\delta_k = \binom{n}{k} \sum_{\ell=k}^{n} \binom{n-k}{\ell-k} (-1)^{\ell}$$

Pour y voir plus clair on pose le changement d'indice $j = \ell - k$: donc $\ell = j + k$ et alors $j = 0$ si $\ell = k$ et $j = n - k$ si $\ell = n$, donc

$$\delta_k = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{j+k} = (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j$$

et on sort au passage un morceau $(-1)^k$ de telle façon à faire apparaitre exactement le binôme de Newton pour $(1-1)^{n-k}$:

$$\delta_k = (-1)^k \binom{n}{k} (1-1)^{n-k}$$

Ceci est bien égal à 0, sauf éventuellement si $n = k$. □

(c) Que vaut δ_k si $k = n$?

Correction. Dans ce cas la formule du binôme s'applique toujours en donnant $(1-1)^0 = 1$, on voit que $\delta_k = (-1)^n$. Si on ne veut pas écrire 0^0, on reprend la formule pour δ_k avec $k = n$ et la somme n'a qu'un seul terme, les deux coefficients binomiaux valent 1 et il reste $(-1)^n$. □

19. Déduire des résultats précédents que $\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} (\ell! - 1)(-1)^\ell = (-1)^n d_n$.

Correction. On commence à écrire, en utilisant la question 17 :

$$\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} (\ell! - 1)(-1)^\ell = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} d_k = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \binom{\ell}{k} d_k$$

en faisant rentrer le $(-1)^\ell \binom{n}{\ell}$ sous la somme de droite. Puis on inverse les deux symboles somme. Il s'agit en fait de la somme double sur tous les indices $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant \ell \leqslant n$ avec en plus $k \leqslant \ell$, donc l'inversion donne

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=k}^{n} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \binom{\ell}{k} d_k$$

et on est pas loin de faire apparaitre δ_k, pour cela il faut écrire que ceci est égal à

$$\sum_{k=1}^{n} d_k \left(\sum_{\ell=k}^{n} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} \binom{\ell}{k} \right) = \sum_{k=1}^{n} d_k \delta_k$$

Mais par la question 18c tous les termes sous la somme sont nuls, sauf si $k = n$ auquel cas le terme vaut $d_n \times (-1)^n$. La somme qu'on calcule est donc égale à $(-1)^n d_n$. □

20. En déduire que :

$$d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \qquad \text{puis que} \qquad D_{n,k} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \tag{9}$$

pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

Correction. Séparons dans la somme précédente

$$\binom{n}{\ell} (\ell! - 1)(-1)^\ell = \binom{n}{\ell} \times \ell! \times (-1)^\ell - \binom{n}{\ell} \times (-1)^\ell$$

puis sommons : on trouve

$$(-1)^n d_n = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} \times \ell! \times (-1)^\ell - \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} \times (-1)^\ell$$

Pour la partie de droite d'abord, on reconnait presque la formule du binôme

$$0 = (1-1)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \times (-1)^\ell = 1 + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} \times (-1)^\ell$$

donc $\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} \times (-1)^\ell = -1$. Et pour le terme de gauche il suffit de remplacer

$$\binom{n}{\ell} \times \ell! = \frac{n!}{\ell!\,(n-\ell)!} \times \ell! = \frac{n!}{(n-\ell)!}$$

et donc en résumé on trouve
$$(-1)^n d_n = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(-1)^\ell n!}{(n-\ell)!} - 1$$
soit, en sortant et en rentrant les constantes,
$$d_n = n! \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(-1)^{\ell-n}}{(n-\ell)!} - (-1)^{-n}$$
Sous la somme, le terme pour $\ell = 0$ serait précisément égal à $(-1)^n$, c'est donc qu'en fait il peut rentrer dans la somme et qu'on peut écrire (en sens inverse, sortir le terme pour $\ell = 0$ permet de revenir à cette formule)
$$d_n = n! \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^{\ell-n}}{(n-\ell)!}$$
Il n'y a plus qu'une seule chose à faire : le changement d'indice $i = n - \ell$, c'est à dire $\ell = n - i$, et i varie lui aussi de 0 à n :
$$d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{-i}}{i!}$$
et $(-1)^{-i}$ est bien la même chose que $(-1)^i$: $+1$ si i est pair et -1 si i est impair. Bref, c'est bien la formule souhaitée.
Ensuite, on écrit $D_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}$ si $0 \leqslant k \leqslant n-1$ qui donne :
$$D_{n,k} = \binom{n}{k} \times (n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times (n-k)! \times \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$$
et la fraction devant se simplifie en $\frac{n!}{k!}$ et on trouve le résultat demandé.
Si $k = n$ ceci n'est pas valable, mais on voit que la formule proposée pour $D_{n,k}$ donne alors
$$\frac{n!}{n!} \times \frac{(-1)^0}{0!} = 1$$
ce qui est bien le résultat attendu pour $D_{n,n}$. □

21. *Informatique.* À l'aide des résultats de la question précédente, proposer une manière plus simple d'écrire les fonctions `d(n)` et `D(n, k)`, définissant ainsi deux nouvelles fonctions `d2(n)` et `D2(n,k)`.

Correction. On propose les fonctions suivantes, les plus naïves possibles (c'est à dire, traduisant directement les formules) :

```
def d2(n):
    s = 0
    for i in range(0, n+1):
        s = s + (-1)**i / factoriel(i)
    return factoriel(n) * s
```

et

```
def D2(n, k):
    s = 0
    for i in range(0, n-k+1):
        s = s + (-1)**i / factoriel(i)
    return factoriel(n) / factoriel(k) * s
```

Écrites tel quel, il y a plusieurs problèmes que l'on pourrait corriger optimiser. Mais cela prendrait encore un certain temps, donc passons. . . □

V Application : le noël des BCPST

Une classe de BCPST de 41 élèves organise son noël : chacun écrit son nom sur un papier, les papiers sont mélangés dans une boite, puis chacun va tirer un papier dans la boite et devra alors offrir un cadeau à la personne dont le nom est écrit. Bien sûr, on aimerait que personne ne tire son propre nom. . .

22. Quel est le nombre total de tirages possible ?

Correction. Il s'agit d'associer les 41 papiers aux 41 élèves : c'est 41!. □

23. Quel est le nombre total de tirages possibles dans lequel aucun élève ne tire son propre nom ?

Correction. C'est d_{41}. □

24. À l'aide des fonctions écrites en Python dans ce DM, déterminer une approximation de la probabilité que personne ne tire son propre nom.

Correction. C'est le nombre de cas où personne ne tire son nom (d_{41}) divisé par le nombre total de tirage possible (41!). On trouve :

```
>>> d(41) / factoriel(41)
0.36787944117144233
```

soit environ 36,8 %. □