DM 2 Mathématiques
À rendre pour le vendredi 13 janvier 2023

On rappelle qu'une **permutation** d'un ensemble fini E est une bijection $\varphi : E \to E$. On appelle **point fixe** de φ un élément $x \in E$ tel que $\varphi(x) = x$. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments qui ont exactement k points fixes. Quitte à numéroter les éléments de E, on peut se ramener au cas où E est égal à $[\![1, n]\!]$. Ainsi :

$$D_{n,k} = \text{Card}\left\{\varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!] \mid \varphi \text{ est bijective et } \text{Card}\{x \in [\![1,n]\!] \mid \varphi(x) = x\} = k\right\}. \tag{1}$$

En particulier, si $k = 0$, les permutations de $[\![1, n]\!]$ sans point fixe sont appelées les **dérangements** de $[\![1, n]\!]$ (aucun élément ne reste à sa place !) et on note $d_n = D_{n,0}$ leur nombre.

I Premiers résultats

1. La liste des permutations de $[\![1, 3]\!]$ est :

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ 3 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 3 & \text{si } x = 3 \end{cases} \tag{2}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } x = 1 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases} \tag{3}$$

   En déduire les valeurs de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. En dressant la liste des permutations de $[\![1, 4]\!]$, déterminer les valeurs de $D_{4,k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 4$.
3. Déterminer les valeurs de $D_{1,0}$, $D_{1,1}$, $D_{2,0}$, $D_{2,1}$ et $D_{2,2}$.
4. Que vaut la somme $\sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$ pour tout entier $n \geqslant 1$? Justifiez précisément votre réponse.
5. Déterminer les valeurs de $D_{n,n-1}$ et $D_{n,n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

II Calcul de $D_{n,n-k}$ en fonction de d_k

6. Dresser la liste des permutations de $[\![1, 5]\!]$ ayant exactement 3 points fixes.
7. Montrer que $D_{n,n-2} = \binom{n}{2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
8. Déterminer une expression similaire pour $D_{n,n-3}$ pour tout entier $n \geqslant 3$.
9. Plus généralement, montrer que pour tout couple d'entiers (n, k) tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ on a :

$$D_{n,n-k} = \binom{n}{k} d_k. \tag{4}$$

10. *Application numérique.*
    (a) En déduire les valeurs de $(D_{5,k})_{1 \leqslant k \leqslant 4}$, puis déterminer celles de $D_{5,5}$ et $D_{5,0}$ à l'aide des résultats précédents.
    (b) Construire les sept premières lignes du triangle des valeurs de $D_{n,k}$, c'est-à-dire les valeurs pour les couples d'entiers (n, k) tels que $1 \leqslant n \leqslant 7$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.
11. *Informatique.*
    (a) Écrire en Python une fonction `factoriel(k)` qui prend en argument un entier $k \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la valeur de $k!$.
    (b) Écrire en Python une fonction `binome(k, n)` qui prend en arguments deux entiers $n \geqslant 1$ et $k \in \mathbb{Z}$, et qui renvoie la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
    (c) Dans cette question, on suppose avoir déjà écrit une fonction `d(n)` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$. Écrire une fonction `D(n,k)` qui prend en arguments deux entiers $n \geqslant 1$ et k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, et qui renvoie le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement k points fixes.

III Une formule de récurrence pour d_n

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geqslant 3$ et on désigne par $\mathscr{D}$ l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$. On exprimera les réponses aux questions 12b et 13b en fonction de n, d_{n-1} et d_{n-2}.

12. (a) Soit $\varphi \in \mathscr{D}$. On pose $\alpha = \varphi(1)$ et on suppose que $\varphi(\alpha) = 1$. Justifier que l'application suivante est bijective et n'a pas de point fixe :

$$\begin{aligned} \psi_1 : [\![1, n]\!] \setminus \{1, \alpha\} &\longrightarrow [\![1, n]\!] \setminus \{1, \alpha\} \\ x &\longmapsto \varphi(x). \end{aligned} \tag{5}$$

    (b) En déduire une expression du cardinal de l'ensemble $\mathscr{D}_1 = \{\varphi \in \mathscr{D} \mid \varphi(\varphi(1)) = 1\}$.

13. (a) Soit $\varphi \in \mathscr{D}$. On pose $\alpha = \varphi(1)$ et on suppose que $\varphi(\alpha) \neq 1$. Justifier que l'application suivante est bijective et n'a pas de point fixe :

$$\begin{aligned} \psi_2 : [\![1, n]\!] \setminus \{\alpha\} &\longrightarrow [\![1, n]\!] \setminus \{\alpha\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \varphi(\alpha) & \text{si } x = 1 \\ \varphi(x) & \text{si } x \neq 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

    (b) En déduire une expression du cardinal de l'ensemble $\mathscr{D}_2 = \{\varphi \in \mathscr{D} \mid \varphi(\varphi(1)) \neq 1\}$.

14. Montrer que :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}). \tag{7}$$

15. *Application numérique.* En déduire les valeurs de d_8, d_9 et d_{10}.
16. *Informatique.* Écrire une fonction `d(n)` (à l'aide de boucles, non récursive) qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$.

IV Une formule générale pour d_n et $D_{n,k}$

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geqslant 1$.

17. À l'aide des résultats précédents, montrer que $\ell! - 1 = \sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} d_k$ pour tout entier $\ell \geqslant 1$.
18. On pose $\delta_k = \sum_{\ell=k}^{n} \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^{\ell}$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
    (a) Montrer que $\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell-k}$ pour tout couple d'entiers (k, ℓ) tels que $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n$.
    (b) En déduire que $\delta_k = 0$ si $k \neq n$.
    (c) Que vaut δ_k si $k = n$?
19. Déduire des résultats précédents que $\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell}(\ell! - 1)(-1)^{\ell} = (-1)^n d_n$.
20. En déduire que :

$$d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \qquad \text{puis que} \qquad D_{n,k} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \tag{8}$$

    pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
21. *Informatique.* À l'aide des résultats de la question précédente, proposer une manière plus simple d'écrire les fonctions `d(n)` et `D(n, k)`, définissant ainsi deux nouvelles fonctions `d2(n)` et `D2(n,k)`.

V Application : le noël des BCPST

Une classe de BCPST de 41 élèves organise son noël : chacun écrit son nom sur un papier, les papiers sont mélangés dans une boite, puis chacun va tirer un papier dans la boite et devra alors offrir un cadeau à la personne dont le nom est écrit. Bien sûr, on aimerait que personne ne tire son propre nom…

22. Quel est le nombre total de tirages possible ?
23. Quel est le nombre total de tirages possibles dans lequel aucun élève ne tire son propre nom ?
24. À l'aide des fonctions écrites en Python dans ce DM, déterminer une approximation de la probabilité que personne ne tire son propre nom.