Correction
DM 3 Mathématiques
À rendre pour le mercredi 8 février 2023

Exercice 1

Le but de cet exercice est de donner *toutes* les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

   Correction. f n'est pas définie si et seulement si $x^3+1=0$ c'est à dire $x^3=-1$. Mais cette équation n'a qu'une seule solution $x=-1$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$. □

2. Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré 2, P, tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^3+1=(x+1)\times P(x)$.

   Correction. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Soit $x\in\mathbb{R}$, posons $P(x)=ax^2+bx+c$. Alors on développe

   $$(x+1)P(x) = ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$$

   Ceci est égal à x^3+1, pour tout $x\in\mathbb{R}$, si et seulement si

   $$\begin{cases} a=1\\ a+b=0\\ b+c=0\\ c=1\end{cases}$$

   et on trouve alors rapidement que $a=1$, $b=-1$, $c=-1$ est l'unique solution qui vérifie toutes ces équations. Conclusion :

   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad x^3+1=(x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{=P(x)}$$

   □

3. Montrer qu'il existe trois nombres $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\forall x\in\mathcal{D}_f$, $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{\alpha}{x+1}+\dfrac{\beta x+\gamma}{P(x)}$.

   Correction. Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$, soit $x\neq 1$. Alors on regroupe les fractions :

   $$\begin{aligned}\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta x+\gamma}{x^2-x+1} &= \frac{\alpha(x^2-x+1)+(\beta x+\gamma)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\\ &= \frac{\alpha x^2-\alpha x+\alpha+\beta x^2+\beta x+\gamma x+\gamma}{x^3+1}\\ &= \frac{(\alpha+\beta)x^2+(-\alpha+\beta+\gamma)x+(\alpha+\gamma)}{x^3+1}\end{aligned}$$

   Ceci est égal à $\frac{1}{x^3+1}$, pour tout $x\neq 1$, dès que (on justifiera bien plus tard qu'il s'agit d'une équivalence)

   $$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ -\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha+\gamma=1\end{cases}$$

   On trouve alors avec les opérations $L_2\leftarrow L_2+L_1$ et $L_3\leftarrow L_3-L_1$

   $$\iff\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ 2\beta+\gamma=0\\ -\beta+\gamma=1\end{cases}$$

puis avec $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 3\gamma = 2 \\ -\beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

Bref, ce système a une unique solution (vu la simplicité du système il n'est pas nécessaire d'échelonner jusqu'au bout et dans l'ordre) et on trouve $\gamma = \frac{2}{3}$ puis $\beta = -\frac{1}{3}$ et enfin $\alpha = \frac{1}{3}$. En résumé

$$\forall x \neq 1, \quad \frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \times \frac{x-2}{x^2-x+1}$$

□

4. Montrer qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $\dfrac{\beta x + \gamma}{P(x)} = \dfrac{qP'(x)}{P(x)} + \dfrac{r}{P(x)}$.

   Correction. La question est posée car le terme $\frac{x-2}{x^2-x+1}$ n'admet pas de primitive évidente...
   Ici $P'(x) = 2x - 1$. Soit $(q, r) \in \mathbb{R}^2$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{qP'(x)}{P(x)} + \frac{r}{P(x)} = \frac{q(2x-1)+r}{x^2-x+1} = \frac{2qx + (-q+r)}{x^2-x+1}$$

   Ceci sera égal à notre terme $-\frac{1}{3} \times \frac{x-2}{x^2-x+1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $-3(2qx + (-q+r)) = x - 2$ c'est à dire

$$\begin{cases} -6q = 1 \\ -3(-q+r) = -2 \end{cases}$$

   où on trouve facilement $q = -\frac{1}{6}$ et $r = \frac{1}{2}$.
   En résumé on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{1}{3} \times \frac{x-2}{x^2-x+1} = -\frac{1}{6} \times \frac{(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2-x+1}$$

   (on aurait pu travailler en enlevant le coefficient $-\frac{1}{3}$ dès le début : alors $\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-1)}{x^2-x+1} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{x^2-x+1}$ se vérifie très facilement). □

5. En résumé, on a écrit

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \underbrace{\frac{\alpha}{x+1}}_{=f_1(x)} + \underbrace{\frac{qP'(x)}{P(x)}}_{=f_2(x)} + \underbrace{\frac{r}{P(x)}}_{=f_3(x)} \tag{1}$$

   (a) Donner **toutes** les primitives de f_1 ainsi que de f_2. On sera particulièrement soigneux quant aux intervalles sur lesquels on travaille.

   Correction. En résumé on a

$$\forall x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[, \quad f(x) = \underbrace{\frac{1}{3} \times \frac{1}{x+1}}_{=f_1(x)} + \underbrace{-\frac{1}{6} \times \frac{(2x-1)}{x^2-x+1}}_{=f_2(x)} + \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2-x+1}}_{=f_3(x)} \tag{2}$$

   Alors pour f_1 attention : les primitives sont les $\frac{1}{3}\ln(x+1) + C_1$ (où $C_1 \in \mathbb{R}$) si $x \in]-1, +\infty[$ mais les $\frac{1}{3}\ln(-(x+1)) + D_1$ si $x \in]-\infty, -1[$ où $D_1 \in \mathbb{R}$ peut être une tout autre constante que C_1, ce qu'on écrit dans les deux cas avec la valeur absolue : $\frac{1}{3}\ln(|x+1|)$.
   Et pour f_2 tout a été fait pour que les primitives soient les $-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + C_2$ où $C_2 \in \mathbb{R}$. Remarquons si ce n'était pas déjà fait avant que le polynôme $x^2 - x + 1$ a son discriminant strictement positif, et donc est strictement positif sur $\mathbb{R}$. □

   (b) On s'occupe maintenant de f_3. On pose $F_3(x) = \displaystyle\int_0^x f_3(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer F_3 avec le changement de variable $t = \frac{1+u\sqrt{3}}{2}$ (où la nouvelle variable s'appelle u).

Correction. On aura alors $\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u$. Remplaçons t par cette valeur dans l'expression $t^2 - t + 1$: cela donne

$$\begin{aligned}
t^2 - t + 1 &= \left(\frac{1+u\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+u\sqrt{3}}{2}\right) + 1 \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + 2u\sqrt{3} + 3u^2\right) - \left(\frac{1+u\sqrt{3}}{2}\right) + 1 \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + 2u\sqrt{3} + 3u^2\right) - \frac{1}{4}\left(2 + 2u\sqrt{3}\right) + \frac{4}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + 2u\sqrt{3} + 3u^2 - 2 - 2u\sqrt{3} + 4\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(3u^2 + 3\right) \\
&= \frac{3}{4}\left(u^2 + 1\right)
\end{aligned}$$

C'est gagné : le but de la manœuvre était de trouver un changement de variable pour que la fonction soit proportionnelle à $\frac{1}{u^2+1}$ et puisse s'intégrer à l'aide de la fonction arctangente.
Il reste à calculer les bornes, en notant simplement que

$$t = \frac{1+u\sqrt{3}}{2} \iff u = \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$$

et il vient :

$$\begin{aligned}
F_3(x) &= \int_{-1/\sqrt{3}}^{(2x-1)/\sqrt{3}} \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{4}(u^2+1)} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{-1/\sqrt{3}}^{(2x-1)/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\arctan(u)\Big]_{-1/\sqrt{3}}^{(2x-1)/\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

□

(c) En déduire toutes les primitives de f_3.

Correction. On peut enlever la constante de droite. Les primitives de f_3 sont les $\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C_3$ où $C_3 \in \mathbb{R}$. □

6. En déduire soigneusement toutes les primitives de f.

Correction. Il suffit de résumer. Inutile de donner plusieurs constantes : elles se regroupent entre elles ! Les primitives de f sont donc les fonctions

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{3}\ln(|x+1|) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C \quad (C\in\mathbb{R}) \quad \text{sur }]-1,+\infty[\\ \frac{1}{3}\ln(|x+1|) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + D \quad (D\in\mathbb{R}) \quad \text{sur }]-\infty,-1[\end{cases}$$

où C, D peuvent être deux constantes différentes… □

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer I_0.

   Correction. Simple calcul avec une primitive :

$$I_0 = \int_0^x e^t \,\mathrm{d}t = \Big[e^t\Big]_0^x = e^x - 1$$

$\square$

2. Calculer I_1 avec une intégration par parties, puis I_2.

   Correction. D'abord $I_1 = \int_0^x (x-t)e^t \,\mathrm{d}t$. On pose $v(t) = x - t$, $v'(t) = -1$, $u'(t) = e^t$, $u(t) = e^t$. Alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \Big[(x-t)e^t\Big]_0^x - \int_0^x -e^t \,\mathrm{d}t \\ &= (x-x)e^x - xe^0 + \int_0^x e^t \,\mathrm{d}t \\ &= -x + \Big[e^t\Big]_0^x \\ &= -x + e^x - 1 \end{aligned}$$

   ce qu'on peut écrire aussi $I_1 = e^x - (1+x)$.
   Puis $I_2 = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^t \,\mathrm{d}t$. On pose $v(t) = \frac{(x-t)^2}{2}$, $v'(t) = \frac{2\times(-1)\times(x-t)}{2} = -(x-t)$, $u'(t) = e^t$, $u(t) = e^t$. L'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[\frac{(x-t)^2}{2}e^t\right]_0^x - \int_0^x -(x-t)e^t \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-x)^2}{2}e^x - \frac{(x-0)^2}{2}e^0 + \int_0^x (x-t)e^t \,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{x^2}{2} + I_1 \end{aligned}$$

   où en reconnaît I_1, et donc ceci donne

$$I_2 = -\frac{x^2}{2} + (e^x - (1+x)) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$$

$\square$

3. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^x = S_n + I_n \tag{3}$$

   Correction. Nous avons déjà fait la vérification pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$. Bref, $x \in \mathbb{R}$ est fixé, soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $e^x = S_n + I_n$. Comme juste avant, on intègre par parties I_{n+1} en posant $v(t) = \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$, $v'(t) = -(n+1) \times \frac{(x-t)^n}{(n+1)!}$ avec $\frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}$, on pose aussi $u'(t) = e^t$, $u(t) = e^t$. Donc

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^n}{n!}e^t \,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t \,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + I_n \end{aligned}$$

   Par l'hypothèse de récurrence, il vient donc $I_n = e^x - S_n$ soit

$$I_{n+1} = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + e^x - S_n = e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

   et les deux dernier termes se regroupent précisément en $-S_{n+1}$. On obtient donc bien $I_{n+1} = e^x - S_{n+1}$ soit $S_{n+1} + I_{n+1} = e^x$. $\square$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec le changement de variable $t = xu$ (où u est la nouvelle variable) montrer que

$$I_n = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n e^{xu} \, \mathrm{d}u \tag{4}$$

Correction. Très simple. On pose $t = xu$, soit (les dérivée sont par rapport à u, et x est fixé) $\mathrm{d}t = x \, \mathrm{d}u$. De plus si $t = 0$ alors $u = 0$ et si $t = x$ alors $u = 1$. Donc

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \frac{(x - xu)^n}{n!} e^{xu} \times x \, \mathrm{d}u \\
&= x \int_0^1 \frac{(x(1-u))^n}{n!} e^{xu}, \mathrm{d}u \\
&= x \int_0^1 x^n \times \frac{(1-u)^n}{n!} e^{xu} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n e^{xu} \, \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

□

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall u \in [0,1], \quad 0 \leqslant (1-u)^n e^{xu} \leqslant e^x \tag{5}$$

Correction. Pour $0 \leqslant u \leqslant 1$ alors : d'une part $-1 \leqslant u \leqslant 0$ donc $0 \leqslant 1 - u \leqslant 1$, et donc en élevant à une puissance n (la fonction $u \mapsto u^n$ est croissante) on en déduit $0 \leqslant (1-u)^n \leqslant 1$.
D'autre part on déduit aussi, si $x \geqslant 0$, $0 \leqslant xu \leqslant x$ puis comme l'exponentielle est croissante on déduit $1 \leqslant e^{xu} \leqslant e^x$.
Alors le produit terme à terme de ces deux inégalités donne tout simplement $0 \leqslant (1-u)^n e^{xu} \leqslant e^x$. □

6. En déduire que si $x \geqslant 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant e^x - S_n \leqslant \frac{x^{n+1} e^x}{n!}$.

Correction. On sait que $e^x - S_n = I_n$ et on utilise l'expression de la question 4. Sous l'intégrale u est bien entre 0 et 1. En intégrant l'inégalité précédente, on obtient

$$\int_0^1 0 \, \mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 (1-u)^n e^{xu} \, \mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 e^x \, \mathrm{d}u$$

Le premier morceau donne 0 ; quant au second, c'est l'intégrale d'une fonction constante (car c'est e^x mais on intègre par rapport u) sur une intervalle de longueur 1. On obtient donc

$$0 \leqslant \int_0^1 (1-u)^n e^{xu} \, \mathrm{d}u \leqslant e^x$$

Il n'y a alors plus qu'à multiplier deux deux côtés par $\frac{x^{n+1}}{n!}$ (qui est positif si x est positif) pour avoir

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n e^{xu} \, \mathrm{d}u \leqslant \frac{x^{n+1}}{n!} e^x$$

et le terme au milieu de cette inégalité est bien $e^x - S_n$. □

7. En déduire que si $0 \leqslant x \leqslant 1$, et sachant que $2 \leqslant e \leqslant 3$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant e^x - S_n \leqslant \frac{3}{n!}$ puis en déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e^x.

Correction. Sous ces conditions alors $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant 1$ d'une part, et par croissance de l'exponentielle on trouve $e^0 \leqslant e^x \leqslant e^1 \leqslant 3$. En multipliant ces deux inégalités membre à membre on trouve

$$0 \leqslant x^{n+1} e^x \leqslant 3$$

et il n'y a alors plus qu'à diviser membre à membre par $n!$, ce qui nous intéresse surtout est $\frac{x^{n+1}}{n!} e^x \leqslant \frac{3}{n!}$. C'est alors la transitivité qui implique $0 \leqslant e^x - S_n \leqslant \frac{3}{n!}$.
Or $\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$ et donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0$, donc aussi $\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n!} = 0$. C'est alors le théorème d'encadrement des gendarmes qui permet de conclure : la suite $(e^x - S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est encadrée entre une suite constante à gauche (donc convergente vers 0) et une suite convergeant aussi vers 0 à droite, donc converge aussi vers 0. Cela signifie aussi que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e^x.

Remarque 1. Nous reverrons largement ce type d'argument. De plus, il est vrai que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ quelque soit $x \in \mathbb{R}$ et donc l'hypothèse $0 \leqslant x \leqslant 1$ rend certaines manipulations plus simples mais n'est en rien nécessaire : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^x quelque soit $x \in \mathbb{R}$ et cela fournit même une assez bonne définition de la fonction exponentielle.

□

8. Écrire une fonction Python `exp(x, epsilon)` qui prend en argument un nombre réel x supposé entre 0 et 1 et un *seuil* ε (un nombre réel strictement positif) et qui calcule une approximation de e^x avec la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que l'approximation est garantie exacte à ε près. On écrira cette fonction *sans* écrire de fonction factorielle annexe ; mais en calculant les factorielles au fur et à mesure dans la boucle.

Correction. Résumons : il s'agit de calculer la somme S_n et de s'arrêter quand $\frac{3}{n!} < \varepsilon$, alors on sera sûr que $|e^x - S_n| < \varepsilon$. Autrement dit c'est une boucle `while` qui continue tant que $\frac{3}{n!} \geqslant \varepsilon$. Écrivons d'abord au brouillon, il s'agit d'avoir dans le corps de la fonction pour calculer une somme

```
S = 0
while 3 / factoriel(n) >= epsilon:
    S = S + x**n / factoriel(n)
```

et comme on utilise la boucle `while` il ne faut pas oublier d'introduire soi-même la variable `n` et de l'incrémenter dans la boucle :

```
n = 0
S = 0
while 3 / factoriel(n) >= epsilon:
    S = S + x**n / factoriel(n)
    n = n + 1
```

Ceci est déjà à peu près correct.
Le problème est qu'à chaque passage dans la boucle il faut recalculer $n!$ (depuis le début, en multipliant tous les nombres de 1 à n), ce qui est un peu bête. Autant avoir une variable nommée `f` qui vaut $n!$ à chaque passage dans la boucle, donnant ceci :

```
n = 0
S = 0
f = 1 # factoriel 0
while 3 / f >= epsilon:
    S = S + x**n / f
    n = n + 1
    f = n * f # f devient factoriel(n+1)
```

Ceci est correct. En fait, on peut faire de même avec les puissances et une variable `p` qui représente x^n, donc qui est initialisée à 1 et évolue selon `p = x * p`. Cela donne finalement :

```
def exp(x, epsilon):
    n = 0
    S = 0
    f = 1
    p = 1
    while 3 / f >= epsilon:
        S = S + (p / f)
        n = n + 1
        f = n * f
        p = x * p
    return S
```

et on peut vérifier en comparant avec les valeurs de la vraie fonction exponentielle. Ceci est un code qui évite au mieux de refaire les calculs de puissance et de factoriel en repartant de zéro. □