DM 3 Mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 + 5x^2 + 9x + 6 = (x+2) \times (ax^2 + bx + c) \tag{1}$$
Développant et regroupant les coefficents, on a
$$\begin{aligned} (x+2) \times (ax^2+bx+c) &= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c && (2)\\ &= ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c && (3)\end{aligned}$$
qui est égal (pour tout $x \in \mathbb{R}$) à $x^3 + 5x^2 + 9x + 6$ dès que
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b+2a & = & 5 \\ c+2b & = & 9 \\ 2c & = & 6 \end{array}\right. \tag{4}$$
dont on trouve rapidement $a = 1$ puis $b = 3$ puis $c = 3$ qui vérifie toutes les équations. On trouve donc une unique solution
$$P : x \mapsto x^2 + 3x + 3 \tag{5}$$

2. La fonction f est définie si et seulement si $x^3 + 5x^2 + 9x + 6 \neq 0$. Or $x^3 + 5x^2 + 9x + 6 = 0$ si et seulement si $x + 2 = 0$ ou $x^2 + 3x + 3 = 0$. Le premier donne $x = -2$ et le deuxième est un polynôme de degré 2 avec $\Delta = 3^2 - 1 \times 4 \times 3 = 9 - 12 = -3 < 0$ donc n'a pas de racines. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Ensuite la fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f$, et donc sur l'intervalle $I =]-2, +\infty[$, f admet bien des primitives.

3. Même méthode, remarquons que $P'(x) = 2x + 3$.
Analyse : on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\forall x \neq -2, \quad \frac{1}{x^3 + 5x^2 + 9x + 6} = \frac{\alpha}{x+2} + \beta\frac{2x+3}{x^2+3x+3} + \frac{\gamma}{x^2+3x+3} \tag{6}$$
Réduisant au même dénominateur, ceci est égal à
$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{x+2} + \beta\frac{2x+3}{x^2+3x+3} + \frac{\gamma}{x^2+3x+3} && (7)\\ &= \frac{\alpha(x^2+3x+3) + \beta(2x+3)(x+2) + \gamma(x+2)}{(x+2)(x^2+3x+3)} && (8)\\ &= \frac{\alpha x^2 + 3\alpha x + 3\alpha + 2\beta x^2 + 7\beta x + 6\beta + \gamma x + 2\gamma}{(x+2)(x^2+3x+3)} && (9)\\ &= \frac{(\alpha+2\beta)x^2 + (3\alpha + 7\beta + \gamma)x + (3\alpha + 6\beta + 2\gamma)}{(x+2)(x^2+3x+3)} && (10)\end{aligned}$$
Identifiant les coefficients, on cherche donc (α, β, γ) tel que
$$(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & & & = & 0 \\ 3\alpha & + & 7\beta & + & \gamma & = & 0 \\ 3\alpha & + & 6\beta & + & 2\gamma & = & 1 \end{array}\right. \tag{11}$$
On échelonne alors ce système :
$$(S) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & & & = & 0 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ & & & & 2\gamma & = & 1 \end{array}\right. \tag{12}$$
On trouve alors $\gamma = \frac{1}{2}$ puis $\beta = -\frac{1}{2}$ et enfin $\alpha = 1$.
Synthèse : les calculs montrent bien que
$$\forall x \neq -2, \quad \frac{1}{x^3 + 5x^2 + 9x + 6} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} \times \frac{2x+3}{x^2+3x+3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+3x+3} \tag{13}$$

4. On a $A(x) = \frac{1}{x+2}$ dont l'ensemble des primitives sur $]-2, +\infty[$ est l'ensemble des $x \mapsto \ln(x+2) + C_1$, pour $C_1 \in \mathbb{R}$.
On a $B(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{2x+3}{x^2+3x+3}$ qui est déjà (à une constante près) sous forme $\frac{P'}{P}$ dont une primitive est $\ln(P)$ (P étant un polynôme avec $\Delta > 0$, reste strictement positif sur I). L'ensemble des primitives de B est l'ensemble des $x \mapsto -\frac{1}{2}\ln(x^2+3x+3) + C_2$ où $C_2 \in \mathbb{R}$.
5. (a) On a

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2} \times \frac{1}{t^2+3t+3}\,\mathrm{d}t \tag{14}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{t^2+3t+3}\,\mathrm{d}t \tag{15}$$

Posons comme suggéré $t = \frac{u\sqrt{3}-3}{2}$, alors $\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u$ (ici c'est la fonction $\varphi(u) = \frac{u\sqrt{3}-3}{2}$ de dérivée $\varphi'(u) = \frac{\sqrt{3}}{2}$), et on calcule à part

$$t^2+3t+3 = \left(\frac{u\sqrt{3}-3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{u\sqrt{3}-3}{2}\right) + 3 \tag{16}$$
$$= \frac{(u\sqrt{3}-3)^2}{4} + \frac{3(u\sqrt{3}-3)}{2} + 3 \tag{17}$$
$$= \frac{3u^2 - 2\times 3\times\sqrt{3}\times u + 9}{4} + \frac{3\sqrt{3}u - 9}{2} + 3 \tag{18}$$
$$= \frac{1}{4}\Big(3u^2 - 6\sqrt{3}u + 9 + 6\sqrt{3}u - 18 + 12\Big) \tag{19}$$
$$= \frac{1}{4}\Big(3u^2+3\Big) \tag{20}$$
$$= \frac{3}{4}\Big(u^2+1\Big) \tag{21}$$

On voit qu'on va pouvoir intégrer avec arctangente, ce qui était en fait le but recherché... Une autre variante de la question aurait pu être : trouver un changement de variable affine ($t = pu+q$ avec $(p,q) \in \mathbb{R}^2$) tel que t^2+3t+3 soit proportionnel à u^2+1, et alors on aboutirait nécessairement à la formule ici donnée.
Enfin il reste à changer les bornes : de $t = \frac{u\sqrt{3}-3}{2}$ on déduit $u = \frac{2t+3}{\sqrt{3}}$, et donc en résumé

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_{3/\sqrt{3}}^{(2x+3)/\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{3}{4}\Big(u^2+1\Big)} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u \tag{22}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{3/\sqrt{3}}^{(2x+3)/\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \tag{23}$$

Ainsi

$$F(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\arctan(u)\Big]_{3/\sqrt{3}}^{(2x+3)/\sqrt{3}} \tag{24}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\right) \tag{25}$$

(b) Dans l'expression ci-dessus le terme de droite est une constante et n'a pas d'importance. L'ensemble des primitives de $C(x)$ est l'ensemble des

$$x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right) + C_3 \tag{26}$$

avec $C_3 \in \mathbb{R}$.
6. Il suffit de sommer toutes les primitives précédentes. Mais le terme $+C_1 + C_2 + C_3$ peut être remplacé d'un seul coup par une seule constante ! L'ensemble des primives de f sur I est donc l'ensemble des

$$x \mapsto \ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+3x+3) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right) + C \tag{27}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ pour l'instant, on ré-écrit le système dans l'ordre le plus habituel possible :

$$(S_\lambda) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} (3-\lambda)x & + & 4y & + & 4z & = & 0 \\ -4x & - & (5+\lambda)y & - & 4z & = & 0 \\ x & + & y & - & \lambda z & = & 0 \end{array}\right. \tag{28}$$

On ne peut pas utiliser L_1 pour éliminer x car on ne connait pas le signe de $3-\lambda$, donc on place L_3 en haut :

$$(S_\lambda) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & \lambda z & = & 0 \\ (3-\lambda)x & + & 4y & + & 4z & = & 0 \\ -4x & - & (5+\lambda)y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right. \tag{29}$$

On peut maintenant éliminer x dans L_2 et L_3 « comme d'habitude » :

$$(S_\lambda) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-(3-\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+4L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & \lambda z & = & 0 \\ & & (1+\lambda)y & + & (4+\lambda(3-\lambda))z & = & 0 \\ & & -(1+\lambda)y & - & 4(1+\lambda)z & = & 0 \end{array}\right. \tag{30}$$

Pour poursuivre, il est nécessaire de séparer des cas.
Cas $1+\lambda=0$, c'est à dire $\lambda=-1$: alors on peut ré-écrire

$$(S_{-1}) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \tag{31}$$

On trouve donc que y et z sont libres puis $x=-y-z$. L'ensemble des solutions est

$$\left\{(-y-z,y,z) \;\middle|\; (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \tag{32}$$

Cas $1+\lambda \neq 0$: d'une part dans L_3 on peut simplifier par $(1+\lambda)$, donc L_3 se ré-écrit $-y-4z=0$ c'est-à-dire $y+4z=0$, et d'autre part dans L_2 alors le coefficient $(4+\lambda(3-\lambda)) = 4+3\lambda-\lambda^2 = -(\lambda^2-3\lambda-4)$ est un polynôme de degré 2 dont on a vu que $\lambda=-1$ est racine, il se factorise en fait $-(\lambda+1)(\lambda-4)$ et on peut simplifier aussi L_2 par $1+\lambda$. On aboutit à

$$(S_\lambda) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & \lambda z & = & 0 \\ & & y & - & (\lambda-4)z & = & 0 \\ & & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right. \tag{33}$$

On peut alors poursuivre l'échelonnage :

$$(S_\lambda) \underset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & \lambda z & = & 0 \\ & & y & - & (\lambda-4)z & = & 0 \\ & & & & -\lambda z & = & 0 \end{array}\right. \tag{34}$$

Il faut encore distinguer.
Cas $\lambda \neq 0$: le système est de rang 3 et on déduit successivement $z=0$ puis $y=0$ puis $x=0$. Il admet donc seulement la solution nulle $(0,0,0)$.
Cas $\lambda=0$: on peut ré-écrire

$$(S_0) \underset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & 4z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \tag{35}$$

Le système est de rang 2. On en déduit que z est libre puis $y=-4z$ puis $x=-y=4z$. L'ensemble des solutions est

$$\left\{(4z,-4z,z) \;\middle|\; z \in \mathbb{R}\right\} \tag{36}$$

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^x \ln^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $n \geqslant 1$, soit $x > 0$. Posons les fonctions $u'(t) = 1$, $v(t) = \ln^n(t)$, alors $u(t) = t$ est une primitive de u et $v'(t) = n \times \frac{1}{t} \times \ln^{n-1}(t)$ est la dérivée de v. Ces quatre fonctions sont bien continues sur tout l'intervalle d'intégration $[1, x]$ (ou $[x, 1]$ selon la position de x par rapport à 1) car $x > 0$, et donc la formule d'intégration par parties s'applique et donne
$$\int_1^x \ln^n(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t \times \ln^n(t)\Big]_1^x - \int_1^x \left(t \times n \times \frac{1}{t} \times \ln^{n-1}(t)\right)\mathrm{d}t \tag{37}$$
Mais d'une part
$$\begin{aligned}\Big[t \times \ln^n(t)\Big]_1^x &= x\ln^n(x) - 1 \times \ln(1) &(38)\\ &= x\ln^n(x) &(39)\end{aligned}$$
car $\ln(1) = 0$, et d'autre part
$$\int_1^x \left(t \times n \times \frac{1}{t} \times \ln^{n-1}(t)\right)\mathrm{d}t = n\int_1^x \ln^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \tag{40}$$
et donc on trouve bien $I_n = x\ln^n(x) - nI_{n-1}$.
2. Le résultat final utilise bien la relation de récurrence mais ne fait plus appel aux intégrales. On travail avec $x > 0$ fixé. Montrons par récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{I_n = -(-1)^n n! + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} x\ln^{n-k}(x)}_{\mathcal{P}(n)} \tag{41}$$
Initialisation : pour $n = 0$ la somme ci-dessus se réduit à x, notamment car $(-1)^0 = 1$, $0! = 1$, et $\ln^0(x) = 1$ et donc la formule donne $-1 + x$. Mais d'autre part
$$\begin{aligned}I_0 &= \int_1^x 1\,\mathrm{d}t &(42)\\ &= \Big[t\Big]_1^x &(43)\\ &= x - 1 &(44)\end{aligned}$$
et donc la propriété est bien vraie pour $n = 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Alors simplement en utilisant la relation démontrée à la question précédente :
$$\begin{aligned}I_{n+1} &= x\ln^{n+1}(x) - (n+1)I_n &(45)\\ &= x\ln^{n+1}(x) - (n+1)\left((-1)^{n+1}n! + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}x\ln^{n-k}(x)\right) &(46)\\ &= x\ln^{n+1}(x) - (n+1) \times (-1)^{n+1}n! - (n+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}x\ln^{n-k}(x) &(47)\\ &= x\ln^{n+1}(x) + (-1)^{n+2}(n+1)! - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(n+1) \times n!}{(n-k)!}x\ln^{n-k}(x) &(48)\\ &= x\ln^{n+1}(x) + (-1)^{n+2}(n+1)! - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(n+1)!}{(n-k)!}x\ln^{n-k}(x) &(49)\\ &= x\ln^{n+1}(x) + (-1)^{n+2}(n+1)! + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(n+1)!}{\Big((n+1)-(k+1)\Big)!}x\ln^{(n+1)-(k+1)}(x)}_{S} &(50)\end{aligned}$$

Ce calcul suggère de poser le changement de variable $j = k+1$ dans S : on alors si k varie de 0 à n, j varie de 1 à $n+1$.

$$S = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \frac{(n+1)!}{\big((n+1)-j\big)!} x \ln^{(n+1)-j}(x) \tag{51}$$

Il n'y a plus qu'à remarquer que le terme $x \ln^{n+1}(x)$ correspond exactement à ce qu'on obtiendrait dans S avec $j = 0$, et donc

$$I_{n+1} = (-1)^{n+2}(n+1)! + \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \frac{(n+1)!}{\big((n+1)-j\big)!} x \ln^{(n+1)-j}(x) \tag{52}$$

Ceci est exactement $\mathcal{P}(n+1)$.