DM 3 Mathématiques
Correction

Problème 1

Remarque 1. On peut démontrer que

$$\lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k} \tag{1}$$

Cela provient de la formule pour la somme des termes successifs d'une suite géométrique

$$\frac{q^j-1}{q-1} = 1+q+\cdots+q^{j-1} \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{q\to 1}\frac{q^j-1}{q-1} = 1+1+\cdots+1 = j \tag{2}$$

1. L'expression définissant $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q$ est bien définie si et seulement si son dénominateur $\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)$ ne s'annule pas. Mais ce produit ne s'annule pas si et seulement si chacun de ses facteurs ne s'annule pas, c'est-à-dire par contraposée, il s'annule si et seulement si $\exists j \in [\![1,k]\!]$, $q^j=1$. Mais pour $q\in\mathbb{R}$ l'équation $q^j=1$ admet pour seule solution $q=1$ (j impair) ou $q=\pm 1$ (j pair), dans tous les cas on a exclu $q=1$ et $q=-1$. Donc $\boxed{\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)\neq 0}$. Ceci est bien valable si $k\geqslant 1$, et aussi $k=0$ où ce produit nul vaut 1, en tout cas il n'y a pas de $q^0=1$.
2. Pour $k=0$ alors les deux produits de la fraction définissant $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q$ sont des produits vides, donc $\boxed{\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix}\right]_q = \frac{1}{1} = 1}$.

   Pour $k=n$, alors les deux produits sont égaux à $\prod_{j=1}^{n}(q^j-1)$ et donc $\boxed{\left[\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix}\right]_q = 1}$.
3. (a) C'est une simplification sur le morceau de droite : pour $0<k<n$,

   $$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(q^j-1)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)\times\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)} \times \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(q^j-1)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)} \tag{3}$$

   mais la fraction de droite se simplifie directement en $\boxed{\prod_{j=n-k+1}^{n}(q^j-1)}$ (j varie de 1 à n, mais on simplifie les termes de 1 à $n-k$, il reste ceux de $n-k+1$ à n).

   (b) Si $k=0$ ou $k=n$, c'est la question d'avant. Si $0<k<n$, alors par définition

   $$\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q = \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(q^j-1)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)\times\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)} \tag{4}$$

   et on reconnait directement $\boxed{\left[\begin{smallmatrix} n \\ n-k \end{smallmatrix}\right]_q = \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q}$.
4. Il s'agit de regrouper ces deux termes en les mettant au même dénominateur. D'abord

   $$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{\displaystyle\prod_{j=n-k+1}^{n-1}(q^j-1)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k-1}(q^j-1)} + q^k \times \frac{\displaystyle\prod_{j=n-k}^{n-1}(q^j-1)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)} \tag{5}$$

   Il faut multiplier le terme de gauche en haut et en bas par q^k-1 pour mettre au même dénominateur :

   $$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^k-1)\times\displaystyle\prod_{j=n-k+1}^{n-1}(q^j-1) + q^k\times\prod_{j=n-k}^{n-1}(q^j-1)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)} \tag{6}$$

Au numérateur, le produit de droite contient un terme de plus pour $j = n - k$, qu'on peut sortir :

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^k - 1) \times \prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} (q^j - 1) + q^k \times (q^{n-k} - 1) \times \prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} (q^j - 1)}{\prod\limits_{j=1}^{k} (q^j - 1)} \tag{7}$$

On a alors

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} (q^j - 1)}{\prod\limits_{j=1}^{k} (q^j - 1)} \times \Big((q^k - 1) + (q^n - q^k) \Big) \tag{8}$$

soit

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} (q^j - 1) \times (q^n - 1)}{\prod\limits_{j=1}^{k} (q^j - 1)} = \frac{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n} (q^j - 1)}{\prod\limits_{j=1}^{k} (q^j - 1)} \tag{9}$$

On reconnait bien $\boxed{\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_q}$.

5. On peut reprendre le même type de raisonnement en mettant au même dénominateur, ou alors raisonner astucieusement : la formule de Pascal de la question précédente mais appliquée directement pour $\left[\begin{smallmatrix} n \\ n-k \end{smallmatrix} \right]_q$ donne

$$\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-k-1 \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-k \end{bmatrix}_q \tag{10}$$

Utilisant la symétrie $\left[\begin{smallmatrix} n \\ n-k \end{smallmatrix} \right]_q = \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_q$ sur chacun de ces trois termes donne

$$\boxed{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q} \tag{11}$$

C'est ce qu'on voulait.

Remarque 2. La suite du raisonnement imite de près la démonstration classique de la formule du binôme de Newton, pour laquelle il est nécessaire d'avoir d'abord établi la formule de Pascal.

6. $\mathcal{P}(1)$ est l'assertion

$$(q^0 x + y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q q^0 x^0 y^1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q q^0 x^1 y^0 \tag{12}$$

qui se réduit à $x + y = x + y$ donc $\boxed{\mathcal{P}(1) \text{ est vraie}}$.

7. (a) D'abord on sort le terme avec $j = n$:

$$\prod_{j=1}^{n} (q^{j-1} x + y) = (q^{n-1} x + y) \times \prod_{j=1}^{n-1} (q^{j-1} x + y) \tag{13}$$

Puis on applique l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n-1)$:

$$\prod_{j=1}^{n} (q^{j-1} x + y) = (q^{n-1} x + y) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k y^{n-1-k} \right) \tag{14}$$

On développe devant :

$$\prod_{j=1}^{n} (q^{j-1} x + y) = q^{n-1} x \left(\sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k y^{n-1-k} \right) + y \left(\sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k y^{n-1-k} \right) \tag{15}$$

Et enfin on fait rentrer les x et les y dans les sommes :

$$\prod_{j=1}^{n}(q^{j-1}x+y) = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}\times q^{n-1}\times x^{k+1}y^{n-1-k}\right)+\left(\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k}\right) \tag{16}$$

La somme de droite correspond bien à celle qui est proposée (à gauche), et pour celle de gauche il suffit de regrouper les puissances de q, on trouve bien

$$\boxed{\prod_{j=1}^{n}(q^{j-1}x+y) = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}+(n-1)}x^{k+1}y^{n-1-k}\right)+\left(\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k}\right)} \tag{17}$$

(b) Dans la preuve classique de la formule du binôme de Newton, il faut poser le changement d'indice $\ell = k+1$ dans la somme ici à gauche, puis séparer et regrouper avec la fomule de Pascal. On a en effet

$$\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}+(n-1)}x^{k+1}y^{n-1-k} = \sum_{\ell=1}^{n}\begin{bmatrix}n-1\\\ell-1\end{bmatrix}_q q^{\frac{(\ell-1)(\ell-2)}{2}+(n-1)}x^{\ell}y^{n-\ell} \tag{18}$$

Renommons directement ℓ en k, sortons de cette somme le terme $\ell = n$ et de l'autre somme le terme $k = 1$, dans les deux cas les coefficients q-binomiaux valent 1 :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(q^{k-1}x+y) = &\left(q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}+(n-1)}x^n+\sum_{k=1}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}_q q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}+(n-1)}x^k y^{n-k}\right)\\ &+\left(y^n+\sum_{k=1}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k}\right)\end{aligned} \tag{19}$$

Remarquons que devant $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, on a donc bien le terme $q^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n$. De même sous la somme on vérifie que $\frac{(k-1)(k-2)}{2}+(n-1) = \frac{k(k-1)}{2}+(n-k)$. Regrouper les deux sommes donne donc bien

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}(q^{k-1}x+y) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n+y^n+\sum_{k=1}^{n-1}\left(q^{n-k}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}_q+\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q\right)q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k}} \tag{20}$$

(c) Il n'y a plus qu'à appliquer la formule de Pascal (deuxième version) :

$$\prod_{k=1}^{n}(q^{k-1}x+y) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n+y^n+\sum_{k=1}^{n-1}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k} \tag{21}$$

et faire rentrer les termes dans la somme, en considérant que ce sont ceux pour $k = 0$ et pour $k = n$:

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}(q^{k-1}x+y) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k}} \tag{22}$$

$\boxed{\text{Ceci est } \mathcal{P}(n)}$.

Conclusion : par récurrence on a montré $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \mathcal{P}(n)}$.

Problème 2

1. f est définie si et seulement si $x^2+1 \geqslant 0$ (mais c'est automatique) et $x+3 \neq 0$.

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-3\}}$.

2. (a) Écrivons $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = x\sqrt{x^2+1}$ et $v(x) = x+3$. Alors $v'(x) = 1$, et $f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$. Mais d'autre part $u(x) = \alpha(x) \times \beta(x)$ où $\alpha(x) = x$ et $\beta(x) = \sqrt{x^2+1}$, avec $\alpha'(x) = 1$ et pour dériver β (dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x^2+1 > 0$) en écrivant $\beta(x) = (x^2+1)^{1/2}$ alors $\beta'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. En résumé

$$u'(x) = 1 \times \sqrt{x^2+1} + x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)+x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} \tag{23}$$

et alors

$$f'(x) = \frac{1}{(x+3)^2} \times \left(\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} \times (x+3) - x\sqrt{x^2+1} \times 1 \right) \tag{24}$$

$$= \frac{1}{(x+3)^2\sqrt{x^2+1}} \times \Big((2x^2+1)(x+3) - x(x^2+1) \Big) \tag{25}$$

$$= \boxed{\frac{x^3+6x^2+3}{(x+3)^2\sqrt{x^2+1}} = f'(x)} \tag{26}$$

soit $f'(x) = \frac{P(x)}{(x+3)^2\sqrt{x^2+1}}$ avec $\boxed{P : x \mapsto x^3+6x^2+3}$.

(b) Étudions le signe de $P' : x \mapsto 3x^2+12x = 3x(x+4)$:

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$3x$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	35	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

(27)

On calcule aisément $P(0) = 3$, $P(-4) = 35$, et les limites en écrivant $P(x) = x^3\left(1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^3}\right)$.
D'après le tableau de variations, on lit que $\forall x \in [-4, +\infty[$, $P(x) > 0$. Mais sur $]-\infty, -4]$, la fonction P est strictement croissante, continue, réalise donc une bijection vers $]-\infty, 35]$. En particulier $\boxed{\text{l'équation } P(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in \,]-\infty, -4]}$, qui est l'unique solution sur $\mathbb{R}$.

(c) On calcule $P(-7) = -46$ et $P(-6) = 3$. Donc $\boxed{\alpha \in \,]-7, -6[}$ (la fonction P réalise une bijection de $[-7, -6]$ vers $[-46, 3]$, intervalle contenant 0, et en plus $P(-7)$ et $P(-6)$ ne sont pas 0).

Remarque 3. Avec un petit programme de dichotomie (maintenant bien connu), on peut déterminer des valeurs approchées à la précision souhaitée, notamment $\alpha \approx -6{,}08$.

3. Dans l'expression de f', le dénominateur est strictement positif (là où il ne s'annule pas). Donc f' est du signe de P, qu'on connait en fonction d'un certain α. On ne peut pas déterminer α mais au moins le placer par rapport à -3 sur le tableau de variations.

x	$-\infty$		α		-3		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(28)

Pour les limites :

- En $+\infty$, on écrit

$$f(x) = \frac{x \times x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x \times \left(1+\frac{3}{x}\right)} = x \times \underbrace{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\left(1+\frac{3}{x}\right)}}_{\to 1} \tag{29}$$

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- En $-\infty$, de même sauf que sous la racine le x qui sort est négatif

$$f(x) = \frac{x \times (-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x \times \left(1+\frac{3}{x}\right)} = (-x) \times \underbrace{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\left(1+\frac{3}{x}\right)}}_{\to 1} \tag{30}$$

et donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

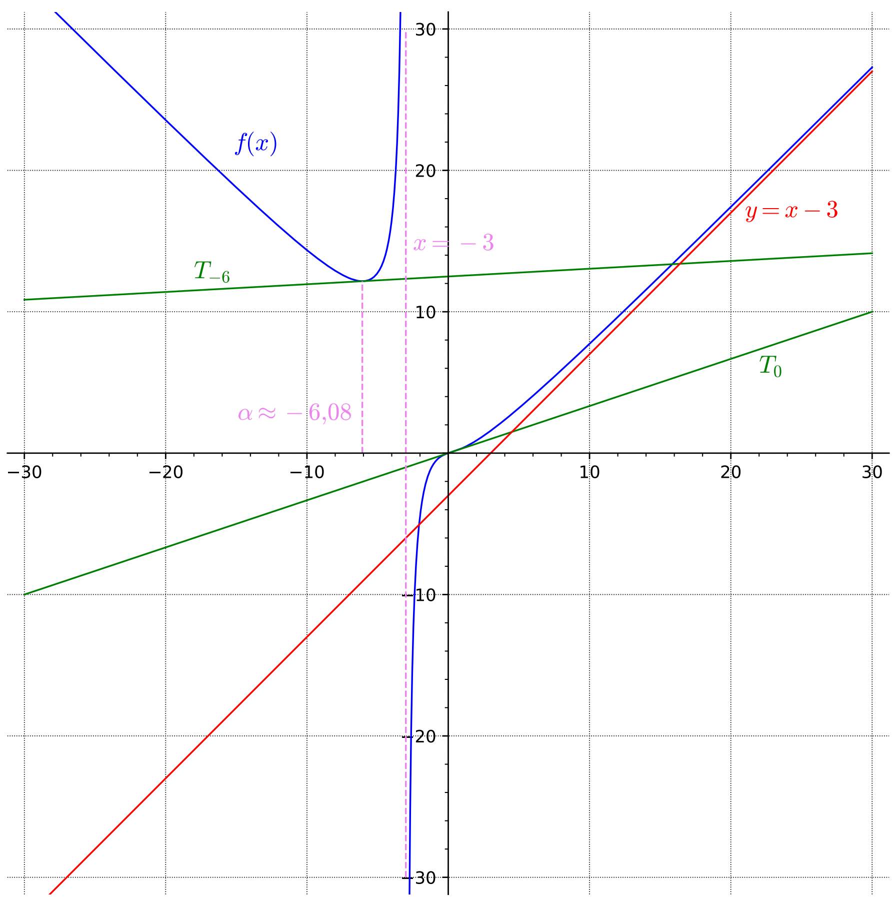
- En -3^+ (avec $x+3>0$) alors le numérateur tend vers la valeur finie $-3\times\sqrt{(-3)^2+1} < 0$ et le dénominateur vers 0^+, donc son inverse vers $+\infty$, donc $\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$.
- En -3^- (avec $x+3<0$) le numérateur tend vers le même $-3\times\sqrt{(-3)^2+1} < 0$ mais le dénominateur vers 0^-, donc $\lim_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$.

Au passage ces limites sont bien cohérentes avec tout le tableau de variations.

4. (a) Pour la tangente T_0 en $x=0$: on calcule $f(0)=0$ et $f'(0)=\frac{1}{3}$, donc la tangente $\boxed{T_0 : x \mapsto \frac{x}{3}}$.

   (b) Pour la tangente T_{-6} en $x=-6$: on calcule d'une part $f(-6) = \frac{-6\times\sqrt{36+1}}{-3} = 2\sqrt{37}$, puis on a besoin de la calculatrice $f'(-6) \approx 12{,}2$, et d'autre part $f'(6) = \frac{P(-6)}{3^2\times\sqrt{37}} = \frac{1}{3\sqrt{37}}$, là encore avec la calculatrice $f'(-6) \approx 0{,}055$ (environ 1/18 : la droite monte de 1 carreau quand on avance de 18 carreaux à droite), donc pour la tangente $\boxed{T_{-6} : x \mapsto 12{,}2 + 0{,}055(x+6)}$.

5. On trace le graphique avec toutes les informations disponibles.



6. (a) On observe que la droite $y = x - 3$ se rapproche de la courbe de f en $+\infty$. C'est une *asymptote oblique*.

(b) Mettant tout au même dénominateur

$$f(x)-(x-3) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x+3} - \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} \tag{31}$$
$$= \frac{x\sqrt{x^2+1}-(x^2-9)}{x+3} \tag{32}$$

Multipliant en haut et en bas par $x\sqrt{x^2+1}+(x^2-9)$, on trouve alors :

$$f(x)-(x-3) = \frac{(x\sqrt{x^2+1})^2-(x^2-9)^2}{(x+3)(x\sqrt{x^2+1}+(x^2-9))} \tag{33}$$
$$= \frac{x^2(x^2+1)-(x^4-18x^2+81)}{(x+3)(x\sqrt{x^2+1}+(x^2-9))} \tag{34}$$
$$= \boxed{\frac{19x^2-81}{(x+3)(x\sqrt{x^2+1}+x^2-9)} = f(x)-(x-3)} \tag{35}$$

(c) Pour $x \to +\infty$, on écrit comme d'habitude en factorisant tout, notamment avec $\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ ce qui donne

$$f(x)-(x-3) = \frac{x^2 \times \left(19-\frac{81}{x^2}\right)}{x \times \left(1+\frac{3}{x}\right) \times x^2 \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{9}{x^2}\right)} \tag{36}$$
$$= \frac{x^2 \times \left(19-\frac{81}{x^2}\right)}{x^3 \times \left(1+\frac{3}{x}\right) \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{9}{x^2}\right)} \tag{37}$$
$$= \frac{\left(19-\frac{81}{x^2}\right)}{x \times \left(1+\frac{3}{x}\right) \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{9}{x^2}\right)} \tag{38}$$

Mais sous cette forme le terme $19-\frac{81}{x^2}$ tend vers 19 (une valeur finie positive), au numérateur $1+\frac{3}{x}$ tend vers 1 et $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{9}{x^2}$ tend vers 2. Donc tout a une limite finie sauf le x au dénominateur qui fait donc tendre toute cette fraction vers 0, et donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

(d) En conséquence du calcul ci-dessus, quand $x \to +\infty$ alors on a notamment

$$x \times (f(x)-(x-3)) = \frac{\left(19-\frac{81}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}\right) \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{9}{x^2}\right)} \longrightarrow \frac{19}{1\times 2} > 0 \tag{39}$$

Cette quantité est donc $\boxed{\text{strictement positive au voisinage de } +\infty}$, et donc $f(x)-(x-3)$ aussi.

7. (a) On observe une asymptote d'équation $\boxed{y = -x+3}$.

(b) Le calcul de la question précédente n'est pas valable pour $x \to -\infty$ car, x étant négatif, quand il sort de la racine on obtient $\sqrt{x^2+1} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.
Reprenons alors avec les mêmes idées :

$$f(x)-(-x+3) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x+3} + \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} \tag{40}$$
$$= \frac{x\sqrt{x^2+1}+(x^2-9)}{x+3} \tag{41}$$

puis on multiplie en haut et en bas par $x\sqrt{x^2+1}-(x^2-9)$

$$\begin{aligned}
f(x)-(-x+3) &= \frac{(x\sqrt{x^2+1})^2-(x^2-9)^2}{(x+3)(x\sqrt{x^2+1}-(x^2-9))} && (42)\\
&= \frac{x^2(x^2+1)-(x^4-18x^2+81)}{(x+3)(x\sqrt{x^2+1}-(x^2-9))} && (43)\\
&= \frac{19x^2-81}{(x+3)(x\sqrt{x^2+1}-x^2+9)} && (44)
\end{aligned}$$

et factorisons ce qui domine, avec $\sqrt{x^2+1}=-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$:

$$\begin{aligned}
f(x)-(-x+3) &= \frac{x^2\times\left(19-\frac{81}{x^2}\right)}{x\times\left(1+\frac{3}{x}\right)\times(-x^2)\times\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{9}{x^2}\right)} && (45)\\
&= \frac{x^2\times\left(19-\frac{81}{x^2}\right)}{(-x^3)\times\left(1+\frac{3}{x}\right)\times\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{9}{x^2}\right)} && (46)\\
&= \frac{\left(19-\frac{81}{x^2}\right)}{(-x)\times\left(1+\frac{3}{x}\right)\times\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{9}{x^2}\right)} && (47)
\end{aligned}$$

et donc on lit sur cette écriture $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x+3)=0}$. De plus, pour $x\to-\infty$ le signe de cette expression est >0, donc $\boxed{f \text{ est au-dessus de l'asymptote en } -\infty}$.