DM 3 Mathématiques
À rendre pour le mercredi 8 février 2023

Exercice 1

Le but de cet exercice est de donner *toutes* les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré 2, P, tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^3+1=(x+1)\times P(x)$.
3. Montrer qu'il existe trois nombres $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\forall x\in\mathcal{D}_f$, $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{\alpha}{x+1}+\dfrac{\beta x+\gamma}{P(x)}$.
4. Montrer qu'il existe $(q,r)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\mathcal{D}_f$, $\dfrac{\beta x+\gamma}{P(x)}=\dfrac{qP'(x)}{P(x)}+\dfrac{r}{P(x)}$.
5. En résumé, on a écrit
$$\forall x\in\mathcal{D}_f,\quad f(x)=\underbrace{\frac{\alpha}{x+1}}_{=f_1(x)}+\underbrace{\frac{qP'(x)}{P(x)}}_{=f_2(x)}+\underbrace{\frac{r}{P(x)}}_{=f_3(x)} \tag{1}$$
   (a) Donner **toutes** les primitives de f_1 ainsi que de f_2. On sera particulièrement soigneux quant aux intervalles sur lesquels on travaille.
   (b) On s'occupe maintenant de f_3. On pose $F_3(x)=\displaystyle\int_0^x f_3(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer F_3 avec le changement de variable $t=\frac{1+u\sqrt{3}}{2}$ (où la nouvelle variable s'appelle u).
   (c) En déduire toutes les primitives de f_3.
6. En déduire soigneusement toutes les primitives de f.

Exercice 2

Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\quad\text{et}\quad I_n=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer I_0.
2. Calculer I_1 avec une intégration par parties, puis I_2.
3. Montrer par récurrence que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad e^x=S_n+I_n \tag{2}$$
4. Soit $n\in\mathbb{N}$. Avec le changement de variable $t=xu$ (où u est la nouvelle variable) montrer que
$$I_n=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-u)^n e^{xu}\,\mathrm{d}u \tag{3}$$
5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que
$$\forall u\in[0,1],\quad 0\leqslant(1-u)^n e^{xu}\leqslant e^x \tag{4}$$
6. En déduire que si $x\geqslant 0$ alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant e^x-S_n\leqslant\frac{x^{n+1}e^x}{n!}$.
7. En déduire que si $0\leqslant x\leqslant 1$, et sachant que $2\leqslant e\leqslant 3$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant e^x-S_n\leqslant\frac{3}{n!}$ puis en déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^x.

8. Écrire une fonction Python `exp(x, epsilon)` qui prend en argument un nombre réel x supposé entre 0 et 1 et un *seuil* ε (un nombre réel strictement positif) et qui calcule une approximation de e^x avec la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que l'approximation est garantie exacte à ε près. On écrira cette fonction *sans* écrire de fonction factorielle annexe ; mais en calculant les factorielles au fur et à mesure dans la boucle.