DM 4 Mathématiques
Correction

Problème 1

1. - Compositions de 2 : [2], [1, 1].
   - Compositions de 3 : [3], [1, 2], [2, 1], [1, 1, 1].
   - Compositions de 4 : [4], [3, 1], [1, 3], [2, 1, 1], [1, 2, 1], [1, 1, 2], [1, 1, 1, 1], [2, 2].
2. Compositions de 5 :
   - Longueur 1 : [5],
   - Longueur 2 : [4, 1], [1, 4], [3, 2], [2, 3],
   - Longueur 3 : [3, 1, 1], [1, 3, 1], [1, 1, 3], [2, 2, 1], [2, 1, 2], [1, 2, 2],
   - Longueur 4 : [2, 1, 1, 1], [1, 2, 1, 1], [1, 1, 2, 1], [1, 1, 1, 2],
   - Longueur 5 : [1, 1, 1, 1, 1].
3. (a) Une composition $C = [c_0, \dots, c_{\ell(C)-1}]$ est non-vide, son premier élément c_0 est entier, et non-nul. Si $c_0 = 1$ alors $C \in \mathcal{A}_n$, sinon $c_0 > 1$ alors $C \in \mathcal{B}_n$: il se produit toujours exactement un cas et un seul, cela correspond à dire que $\boxed{\mathcal{A}_n \text{ et } \mathcal{B}_n \text{ forment une partition de } \mathcal{C}_n}$.

   (b) Cela signifie $\mathcal{C}_n = \mathcal{A}_n \cup \mathcal{B}_n$, avec $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{B}_n = \emptyset$. On obtient donc (union d'ensembles finis disjoints) $\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{C}_n) = \mathrm{Card}(\mathcal{A}_n) + \mathrm{Card}(\mathcal{B}_n)}$.
4. Soit $C = [1, c_1, c_2, \dots, c_{\ell(C)-1}] \in \mathcal{A}_n$. La somme de ces termes donne n. On enlève le premier 1, la somme fait $n-1$, et $[c_1, c_2, \dots, c_{\ell(C)-1}]$ est bien toujours constitué d'entiers positifs non-nuls, c'est donc bien une composition de $n-1$. L'application Φ est bijective car on peut donner directement son application réciproque, celle qui a une composition $D = [d_0, d_1, \dots, d_{\ell(d)-1}]$ de $n-1$ donne $[1, d_0, d_1, \dots, d_{\ell(d)-1}]$ (on remet le 1 devant), en effet si $d_0 + d_1 + \dots + d_{\ell(d)-1} = n-1$ alors $1 + d_0 + d_1 + \dots + d_{\ell(d)-1} = n$ (cette réciproque va bien de $\mathcal{C}_{n-1}$ vers $\mathcal{A}_n$). Donc $\boxed{\Phi : \mathcal{A}_n \to \mathcal{C}_{n-1} \text{ est bijective}}$.
5. Si $C = [c_0, c_1, \dots, c_{\ell(C)-1}] \in \mathcal{B}_n$ avec $c_0 > 1$, alors $c_0 + c_1 + \dots + c_{\ell(C)-1} = n$, si on retire 1 au c_0 alors $[c_0-1, c_1, \dots, c_{\ell(C)-1}]$ est toujours bien une liste d'entiers strictement positifs, et dont la somme fait $n-1$ cette fois : c'est une composition de $n-1$. L'application réciproque envoie une composition $D = [d_0, d_1, \dots, d_{\ell(D}-1]$ de $n-1$ sur $[d_0+1, d_1, \dots, d_{\ell(D)-1}]$ (on remet le 1). Donc $\boxed{\Psi : \mathcal{B}_n \to \mathcal{C}_{n-1} \text{ est bijective}}$.
6. (a) Deux ensembles en bijection ont le même cardinal. On en déduit donc $\mathrm{Card}(\mathcal{A}_n) = \mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n-1})$ (grâce à Φ) et $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_n) = \mathcal{C}_{n-1}$ (grâce à Ψ).

   La question précédente donne alors $\mathrm{Card}(\mathcal{C}_n) = \mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n-1}) + \mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n-1})$ soit $\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{C}_n) = 2 \times \mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n-1})}$.

   (b) C'est une simple suite géométrique de raison 2. Ici $\mathrm{Card}(\mathcal{C})_1 = 1$ car [1] est bien l'unique composition de 1, on en déduit $\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{C}_n) = 2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
7. (a) *Petite ambigüité de formulation dans le sujet : il faut prendre Φ restreinte à $\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{A}_n$, et Ψ restreinte à $\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{B}_n$. De plus, pour Φ, il faut supposer $k \geqslant 2$, mais pour $C \in \mathcal{C}_{n,1} \cap \mathcal{A}_n$ alors nécessairement $n = 1$ (c'est la composition [1] de $n = 1$, la seule de longueur 1 qui démarre par 1).*

   Ci-dessus, Φ envoie une composition de n de longueur un certain $k \geqslant 2$ sur une composition de $n-1$ (on l'a déjà dit) de longueur $k-1$ (car on retire un terme de la composition). Sa réciproque remet le 1, donc $\boxed{\Phi : \mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{A}_n \to \mathcal{C}_{n-1,k-1} \text{ est bijective}}$.

   De même, Ψ envoie une composition de n de longueur un certain $k \geqslant 1$ sur une composition de $n-1$ de même longueur. Donc $\boxed{\Psi : \mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{B}_n \to \mathcal{C}_{n-1,k} \text{ est bijective}}$.

   (b) Combinons : on a d'une part $\mathcal{C}_{n,k} = (\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{A}_n) \cup (\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{B}_n)$ (c'est toujours une partition), donc

$$\mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n,k}) = \mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{A}_n) + \mathrm{Card}(\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{B}_n) \tag{1}$$

D'autre part avec les bijections ci-dessus alors pour tout $n \geqslant 2$, et pour $k \geqslant 2$, $\text{Card}(\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{A}_n)) = \text{Card}(\mathcal{C}_{n-,k-1})$ et pour $k \geqslant 1$, $\text{Card}(\mathcal{C}_{n,k} \cap \mathcal{B}_n)) = \text{Card}(\mathcal{C}_{n-1,k})$. En combinant les deux on obtient bien

$$\boxed{\text{Card}(\mathcal{C}_{n,k}) = \text{Card}(\mathcal{C}_{n-1,k-1}) + \text{Card}(\mathcal{C}_{n-1,k})} \tag{2}$$

valable pour $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 2$ (éventuellement aussi pour $k = 1$: alors le terme $\text{Card}(\mathcal{C}_{n-1,k-1}) = 0$ car on ne peut alors pas former une somme donnant $n - 1 \geqslant 1$ de longueur 0).

(c) Démontrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\text{Card}(\mathcal{C}_{n,k}) = \binom{n-1}{k-1}$ ».
Initialisation : pour $n = 1$ alors k ne peut être égal qu'à 1, et $\text{Card}(\mathcal{C}_{1,1}) = 1$ (la composition $[1]$ de 1 est de longueur 1) et c'est aussi bien $\binom{0}{0}$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons alors $\mathcal{P}(n+1)$. Prenons d'abord $k \in [\![2, n+1]\!]$. Alors par la relation de récurrence obtenue, $\text{Card}(\mathcal{C}_{n+1,k}) = \text{Card}(\mathcal{C}_{n,k-1}) + \text{Card}(\mathcal{C}_{n,k})$. Par l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$, cela donne $\text{Card}(\mathcal{C}_{n+1,k}) = \binom{n-1}{k-2} + \binom{n-1}{k-1}$. Par la formule de Pascal, on obtient alors $\text{Card}(\mathcal{C}_{n+1,k}) = \binom{n}{k-1}$. C'est bien la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.
Si on avait $k = 1$ alors on a directement une unique composition de n de longueur 1, c'est $[1, 1, \dots, 1]$. On a donc bien $\text{Card}(\mathcal{C}_{n,1}) = \binom{n}{0} = 1$.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!], \text{Card}(\mathcal{C}_{n,k}) = \binom{n-1}{k-1}}$.

Remarque 1. Dans ce type de récurrence, il est **absolument crucial** que le quantificateur $\forall k$ soit **sous** l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ (fasse partie de $\mathcal{P}(n)$). En effet pour passer du rang n au rang $n + 1$ on utilise la propriété au rang n mais pour différentes valeurs de k, **on ne peut donc pas conclure** si on démontrait $\forall k$, $\mathcal{P}(n)$: « … » auquel cas on fixerait d'abord k et par $\mathcal{P}(n)$ la propriété serait vraie au rang n seulement pour ce k, et cela ne dirait rien sur $k - 1$.

8. (a) Pour $n = 3$:
   - $f_3([3]) = \emptyset$
   - $f_3([1, 2]) = \{1\}$
   - $f_3([2, 1]) = \{2\}$
   - $f_3([1, 1, 1]) = \{1, 2\}$

(b) On retrouve la composition en prenant la différence de deux termes consécutifs. Le dernier terme de la composition est imposé car la somme doit donner n.
   - $g_{10}([2, 3, 7, 8]) = [2, 1, 4, 1, 2]$ (le 2 final pour que la somme donne 10)
   - $g_{12}([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]) = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5]$

(a) D'abord, pour une composition $C = [c_0, c_1, \dots, c_{\ell(C)-1}]$ de n, alors les nombres apparaissant étant strictement positifs, les sommes cumulées $(\sum_{j=0}^{k} c_j)_{1 \leqslant k \leqslant \ell(C)-2}$ forment une suite de nombres strictement croissants (donc distincts) incluse dans $[\![1, n-1]\!]$ (car on ne prend par le dernier $c_\ell - 1 \geqslant 1$). Alors $g_n(f_n(C))$ est la liste formée des $\sum_{i=0}^{j} c_i - \sum_{i=0}^{j-1} c_i$, ce qui redonne bien le terme c_j, pour $1 \leqslant j \leqslant \ell(C)-2$. Pour $j = 0$ on retrouve directement c_0. Et pour $j = \ell(C) - 1$ on retrouve $c_{\ell(C)-1}$ par la condition que la somme totale doit donner n : le dernier terme de $f_n(C)$ est $\sum_{j=0}^{\ell(C)-2} c_j$ mais on sait $\sum_{j=0}^{\ell(C)-1} c_j = n$ et donc $n - \sum_{j=0}^{\ell(C)-2} c_j = c_{\ell(C)-1}$. On a donc bien $g_n(f_n(C)) = C$. Ceci est aussi bien vrai si $C = [n]$. Donc $\boxed{g_n \circ f_n = \text{id}_{\mathcal{C}_n}}$.
Réciproquement, pour une partie de $[\![1, n-1]\!]$ rangée par ordre croissant qu'on écrit $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$ alors posons $g_n(A) = [c_0, c_1, \dots, c_k]$ on sait que $c_j = a_j - a_{j-1}$ $(1 \leqslant j \leqslant k-1)$ et donc la somme est téléscopique $\sum_{i=1}^{j} c_i = a_j - a_0$ et ainsi $\sum_{i=0}^{j} c_i = a_j$, par $a_0 = c_0$. Ceci est vrai pour tout $0 \leqslant j \leqslant k-1$. On a donc $f_n(g_n(A))$ vraie pour toute partie $A \subset [\![1, n-1]\!]$, et y compris aussi pour la partie vide. Donc $f_n \circ g_n = \text{id}_{\mathcal{P}([\![1,n-1]\!])}$.
Ceci démontre que $\boxed{f_n \text{ et } g_n \text{ sont des bijections réciproques l'une de l'autre}}$.

(b) Deux ensembles en bijection ont le même cardinal.
Donc : $\boxed{\text{Card}(\mathcal{C}_n) = \text{Card}(\mathcal{P}([\![1, n-1]\!])) = 2^{n-1}}$.

9. (a) La suite rangée par ordre crossant définie par $f_n(C)$ est formée d'entiers distincts (suite strictement croissante) par tous les termes de la composition sont strictement positifs. Sur les formules ci-dessus, si C est de longueur k alors $f_n(C)$ est une suite de $k-1$ éléments strictement croissants, donc une partie à $k-1$ éléments de $[\![1, n-1]\!]$. Dans le cas $C = [n]$ alors $k = 1$, et $f_n(C) = \emptyset$ est la partie à 0 éléments : c'est bien vrai aussi.

   (b) Encore une fois, deux ensembles en bijection ont le même cardinal.
   On en déduit $\boxed{\mathscr{C}_{n,k} = \mathrm{Card}(\mathscr{P}_{k-1}([\![1, n-1]\!])) = \binom{n-1}{k-1}}$.

10.
   - $[1, 2, 3]$: les 6 permutations des nombres 1, 2, 3 donnent une permutation semblable (ce sont $[1, 2, 3]$, $[1, 3, 2]$, $[2, 1, 3]$, $[2, 3, 1]$, $[3, 1, 2]$, $[3, 2, 1]$).
   - $[1, 1, 2, 3]$: il y a 24 façons de permuter les 4 nombres de la composition, cependant toutes vont apparaitre deux fois, quitte à échanger de place les 1… Il y a en fait seulement 12 compositions semblables à celle-ci.
   - $[3, 3, 1, 1, 1, 2]$: il y a $6! = 720$ façons de permuter les 6 nombres, cependant chaque composition va apparaitre en permutant les 3 (deux façons possibles) mais aussi en permutant les 1 (six façons possible). Il y a en fait $\frac{720}{2\times 3} = 120$.

11. On trouve : $[5]$, $[4, 1]$, $[3, 2]$, $[3, 1, 1]$, $[2, 2, 1]$, $[2, 1, 1, 1]$, $[1, 1, 1, 1, 1]$.

12. C'est comme pour les anagrammes : on compte le nombre de permutations totales des nombres apparaissant dans la composition, et on divise par le nombre de fois où chaque composition apparait ; celle-ci s'obtient en comptant combien de fois on peut permuter un même nombre au sein d'une composition.

Problème 2

1. f *n'est pas* définie si et seulement si $x^3 + 8 = 0$, c'est-à-dire $x^2 = -8$ soit $x = -2$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}}$.
   Sur $]-2, +\infty[$ qui est un intervalle, f est continue, et donc $\boxed{f \text{ admet des primitives sur }]-2, +\infty[}$.

2. (a) Analyse : on cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad \frac{1}{x^3+8} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2-2x+4} \tag{3}$$
$$= \frac{a(x^2-2x+4) + (x+2)(bx+c)}{(x+2)(x^2-2x+4)} \tag{4}$$
$$= \frac{(a+b)x^2 + (-2a+2b+c)x + (4a+2c)}{x^3+8} \tag{5}$$

   On veut alors (a, b, c) tels que

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2a+2b+c=0 \\ 4a+2c=1 \end{cases} \tag{6}$$

   On trouve alors rapidement $\boxed{a = \frac{1}{12},\ b = -\frac{1}{12},\ c = \frac{1}{3}}$.
   Conclusion : quitte à factoriser les fractions on trouve

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad \boxed{f(x) = \underbrace{\frac{1}{12} \times \frac{1}{x+2}}_{A(x)} - \frac{1}{12} \times \frac{x-4}{x^2-2x+4}} \tag{7}$$

   (b) $A(x) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{x+2}$, la primitive s'obtient avec ln, une primitive est $\frac{1}{12}\ln(x+2)$.
   Donc $\boxed{\text{l'ensemble des primitives de } A \text{ sur }]-2, +\infty[\text{ est } \left\{ x \mapsto \frac{1}{12}\ln(x+2) + C_1 \;\middle|\; C_1 \in \mathbb{R} \right\}}$.

3. (a) Analyse : on veut (d, e) tels que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad -\frac{1}{12} \times \frac{x-4}{x^2-2x+4} = d\frac{2x-2}{x^2-2x+4} + \frac{e}{x^2-2x+4} \tag{8}$$
$$= \frac{2dx + (-2d+e)}{x^2-2x+4} \tag{9}$$

On veut donc (d, e) tels que

$$\begin{cases} 2d = -\frac{1}{12} \\ -2d + e = \frac{1}{3} \end{cases} \tag{10}$$

On trouve rapidement $\boxed{d = -\frac{1}{24} \text{ et } e = \frac{1}{4}}$.

Conclusion :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad \boxed{-\frac{1}{12} \times \frac{x-4}{x^2-2x+4} = \underbrace{-\frac{1}{24} \times \frac{2x-2}{x^2-2x+4}}_{B(x)} + \underbrace{\frac{1}{4} \times \frac{1}{x^2-2x+4}}_{C(x)}} \tag{11}$$

(b) B est à une constante près de la forme $\frac{u'}{u}$ dont une primitive est $\ln(u)$. On vérifie au passage que le polynôme $x^2 - 2x + 4 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc une primitive de B est $-\frac{1}{24}\ln(x^2 - 2x + 4)$.

Donc $\boxed{\text{l'ensemble des primitives de } B \text{ sur }]-2, +\infty[\text{ est } \left\{ x \mapsto -\frac{1}{24}\ln(x^2-2x+4) + C_2 \;\middle|\; C_2 \in \mathbb{R} \right\}}$.

4. On a alors $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{4} \times \frac{1}{t^2 - 2t + 4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{t^2-2t+4}\,\mathrm{d}t$, bien définie pour tout $x \in]-2, +\infty[$ car alors tout l'intervalle entre 0 et x reste dans $]-2, +\infty[$.

(a) On veut poser $u = \frac{t-1}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire $t = \sqrt{3}u + 1$. On ré-écrit alors :

$$\begin{aligned} t^2 - 2t + 4 &= \left(\sqrt{3}u + 1\right)^2 - 2\left(\sqrt{3}u + 1\right) + 4 && (12) \\ &= \left(3u^2 + 2\sqrt{3}u + 1\right) - 2\sqrt{3}u - 2 + 4 && (13) \\ &= 3u^2 + 3 = 3(u^2 + 1) && (14) \end{aligned}$$

Et $\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t$ soit $\mathrm{d}t = \sqrt{3}\,\mathrm{d}u$. De plus, quand $t = 0$ alors $u = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, et quand $t = x$ alors $u = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$. En résumé c'est bien le changement de variable $u = \varphi(t)$ où $\varphi : [0, x] \to [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{x-1}{\sqrt{3}}]$ est continue et à dérivée continue, et on peut écrire

$$F(x) = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{t^2 - 2t + 4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{x-1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}}{3(u^2+1)}\,\mathrm{d}u \tag{15}$$

Mais cette dernière se calcule avec une primitive en arctangente :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{x-1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u && (16) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \times \Big[\arctan(u)\Big]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{x-1}{\sqrt{3}}} && (17) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) && (18) \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{12}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{12}\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = F(x)} && (19) \end{aligned}$$

(b) Ici F est l'unique primitive de C s'annulant en 0. On obtient toutes les primitives de C en ajoutant une constante $C_3 \in \mathbb{R}$; on peut alors commencer par retirer le terme constant ci-dessus (mais il se calcule aussi : $\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}$). Conclusion : l'ensemble des primitives de C sur $]-2, +\infty[$ est

$$\boxed{\left\{ x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{12}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C_3 \;\middle|\; C_3 \in \mathbb{R} \right\}} \tag{20}$$

5. Il suffit alors de faire la somme des trois primitives précédentes. Les trois constantes se regroupent en une seule : l'ensemble des primitives de f sur $]-2,+\infty[$ est

$$\boxed{\left\{x \mapsto \frac{1}{12}\ln(x+2) - \frac{1}{24}\ln(x^2-2x+4) + \frac{\sqrt{3}}{12}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + K \;\middle|\; K \in \mathbb{R}\right\}} \tag{21}$$

Remarque 2. Le changement de variable proposé est l'unique relation de la forme $u = \alpha t + \beta$ ($(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$) qui ramène le polynôme $t^2 - 2t + 4$ à un multiple de $u^2 + 1$, donc à une possibilité de primitiver $\frac{1}{t^2-2t+4}$ à l'aide de la fonction arctangente. On peut aussi le découvrir avec la forme canonique : $t^2 - 2t + 4 = (t-1)^2 + 3$ puis $(t-1)^2 + 3 = 3((\frac{t-1}{\sqrt{3}})^2 + 1)$.

Plus généralement, toutes les fonctions $\frac{1}{P(x)}$ où P est un polynôme de degré 2 avec discriminant $\Delta < 0$ peuvent se ramener par un tel changement de variable à $u^2 + 1$ et s'intégrer avec la fonction arctangente. Les polynômes avec $\Delta > 0$, eux, se factorisent en $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ (où a est le coefficient dominant et r_1, r_2 les deux racines ; on peut alors « décomposer en éléments simples » sous forme $\frac{1}{P(x)} = \frac{\alpha}{x-r_1} + \frac{\beta}{x-r_2}$ (où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer) et trouver une primitive avec ln cette fois. Ainsi arctan et ln permettent d'intégrer *toutes* les fonctions $\frac{1}{P}$ où P est un polynôme de degré 2 — et en fait, en factorisant les polynômes et en décomposant comme pour le cas $\Delta > 0$ les fractions, tous les $\frac{1}{P}$ où P est de degré 3 et même en théorie *tous* les quotients $\frac{P}{Q}$ de deux polynômes !